УДК 621.891+621.89+621.567; 539.62

М.Ф. Семенюк[1], Г.О. Сіренко[2], Л.М. Солтис[2]

Означення ізотропности нано- та мікрошорстких поверхонь твердих тіл під час математичного опису контактних явищ

[1]Хмельницький національний університет,
вул. Інститутська, 11, м. Хмельницький, 29016, Україна
[2]Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
вул. Шевченка, 57, м. Івано-Франківськ, 76025, Україна

Розглянуто ідеальну сферичну модель ізотропної поверхні. Встановлено, що ідеальна сферична модель в загальному випадку не має місця під час моделювання нано- та мікрошорсткої поверхні ізотропним випадковим полем.

Ключові слова: шорстка поверхня, контактні явища, ізотропна поверхня, анізотропна поверхня, тверде тіло, випадкове поле.

M.F. Semenyuk[1], H.O. Sirenko[2], L.M. Soltys[2]

The Definition of Isotropism of Nano- and Microrough Surfaces of Solid States in the Mathematical Description of Contact Phenomena

[1]Khmelnytsky National University,
11, Instytutska Str., Khmelnytsky, 29016, Ukraine
[2]Vasyl Stefanyk' Precarpathian National University,
57, Shevchenko Str., Ivano-Frankivsk, 76025, Ukraine

The ideal spherical model of isotropic surface has been considered. It has been determined that the ideal spherical model in general has no place in the modeling of nano- and microrough surface by isotropic random field.

Key words: rough surface, contact phenomena, isotropic surface, anisotropic surface, solid state, random field.

Стаття поступила до редакції 14.04.2010; прийнята до друку 14.05.2010.

Вступ

1. Шорсткість поверхні значно впливає на такі фізико-хемічні контактні явища та процеси, як: корозійну та радіаційну стійкість; теплопровідність; змочування поверхні твердих тіл крапельними рідинами і розтопами металів та полімерів; електрохемічне полірування та травлення; конденсація на поверхні та випаровування з поверхні; кипіння; перегін (сублімація) з поверхні та деперегін (конденсація ґазу або рідини) на поверхню твердого тіла; адсорбція, адгезія, когезія твердих тіл, зчеплення поверхонь; електроконтактні та електрокінетичні явища; електроосмос та електрофорез; розподіл ζ – потенціалу біля поверхонь тощо [1, 2].

2. При описі шорсткої твердої поверхні та розрахунках фактичної площі контакту (ФПК) застосовують моделі поверхні у такому вигляді: набору сфер, розподілених за висотою лінійно або нелінійно [3 – 11]; набору стрижнів, розподілених за висотою лінійно або за законом Ґаусса [1, 6, 12 – 14]; набору сфер або циліндрів, рівномірно розподілених на поверхні і таких, що мають однаковий радіус кривини і однакову висоту [15]; конусів [16 – 18]; зрізаних конусів [19]; пірамід [20]; сфер, симетричних клинів, конусів з кутом розхилу $\pi/2$, які мають лінійний, нормальний або Пуассона розподіл за висотою і випадковий розподіл по поверхні [21]; еліпсоїдів [16, 22] тощо. При цьому припускають сталість радіуса або кута при вершині, а закон розподілу висоти нерівностей визначають експериментально за параметрами шорсткости поверхні. Накладання обмежень на форму виступів віддаляє модель від реальної поверхні. Як засвідчила зйомка топографічної мапи поверхні ряду профілів, реальна форма мікровиступів є далекою від правильної [23, 24].

3. Статистична оцінка шорсткості поверхні [2, 25 – 30]: існують способи опису нано- та мікрошорсткої поверхні, що базуються на використанні 24 параметрів шорсткости і хвилястости [31, 32], які визначаються за профілограмами профілю поверхні та зняті в кількох напрямках.

Параметри статистичної оцінки шорстких поверхонь включають:

• середню (або центральну) лінію профілю $\mathbf{Z_1}$, вибірковою оцінкою якої є середнє арифметичне відхилення профілю поверхні **Ra** від базової лінії в межах базової довжини **L** [25];

• квадрат лінії профілю [2], вибірковою оцінкою якої є середнє квадратичне відхилення профілю поверхні **Rq** [25];

• функцію автокореляції $\mathbf{Z_3}$, вибірковою оцінкою в межах базової довжини **L** є $\mathbf{R_1(\tau)}$ [2];

• якщо функція **y=f(x)** є стаціонарною з нормальним розподілом Ґаусса (н.з.р.), то вона повністю характеризує висотні якости профілю поверхні. Тоді розподіл ординат за довжиною профілю поверхні підпорядкований н.з.р. Ґаусса [12, 33 – 36], а сам розподіл характеризує: щільність ймовірностей нормального розподілу, нормовану щільність ймовірностей нормального розподілу;

• розподіл висот вершин характеризує: теоретична та фізична спектральні щільности (степеневі функції щільности) профілю поверхні. Спектральні щільности **S(ω),** що відповідають кореляційним функціям розподілу висот вершин, можна визначити за допомогою перетворення Фур'є [2, 12, 33, 37];

• частотні характеристики спектру [33];

• коґерентні характеристики спектру [33];

• інші параметри: параметр нахилу нерівностей [2]; параметр гостроверхости (кривини) вершин нерівностей [2]; параметр напрямку нахилу виступів [2]; ширина розподілу (розмах варіювання) ординат профілю; нормалізована (стандартизована) висота нерівностей профілю поверхні за 10 точками (**Rz**) [25];

• крокові параметри нерівностей поверхні: середній крок нерівностей [25]; середній крок нерівностей за вершинами; середній крок нерівностей за западинами;

• до структурного параметру нерівностей поверхні відносять [1, 2, 25] стандартизовану відносну опорну довжину профілю $\mathbf{t_p}$ на рівні **p** (від $\mathbf{R_{max}}$) перерізу профіля (у % або відносних одиниць від базової довжини **L**) – опорна крива Аббота [1, 38 – 40];

• відомі спроби створення простого критерію оцінки шорсткости, який би у повній мірі характеризував експлуатаційні властивости поверхні [31, 41]. Так, в [42 – 46] запропонований безрозмірний комплекс $\mathbf{\Delta^*}$.

4. Теоретико-ймовірнісні моделі.

Одним із найбільш вагомих факторів, який утруднює математичний опис шорсткости поверхонь твердих тіл, є її нереґулярність, що виникає в результаті фізичних та фізико-хемічних способів обробки та формування поверхонь твердих тіл, яка і викликає необхідність застосування для її опису та аналізу теоретико-ймовірністних методів [47, 48].

Дослідження шорсткої поверхні методами одномірних випадкових функцій [49 – 53] базуються на двох припущеннях:

• статистичні характеристики поверхні приймаються рівними статистичним характеристикам профілоґрами цієї ж поверхні;

• вершини нерівностей вважають сферичними.

Профілоґрама вказує на менше число високих піків порівняно з дійсним числом високих вершин на поверхні, тому що профілоґрама з більшою ймовірністю проходить по схилу виступу поверхні, ніж по вершині. Навіть для грубої поверхні та поверхні, яка отримана різанням з вузькою спектральною функцією, малоймовірно, що всі нерівности будуть проходити через середню лінію профілю. Як показано в [54], середня висота виступів профілю приблизно на 80% менша середньої висоти виступів поверхні.

Таким чином, перше припущення приводить до помилки при визначенні розподілу висот вершин, кривини і ґрадієнту поверхні: профілоґрама дає занижені ймовірности високих вершин, кривини у вершинах і середні ґрадієнти.

На цій же підставі крива опорної поверхні доволі неточно визначає площу поверхні на відповідному рівні, тому що певна сума відрізків профілоґрами являє собою переріз нерівностей поверхні по схилах і, таким чином, непропорційна реальній площі на даній висоті. Ймовірність, що на профілоґрамі зустрінеться максимальний виступ, дуже мала.

Таким чином, величини параметрів $\mathbf{R_{max}}$ та кривої Аббота опорної поверхні визначаються з малою точністю. Друге припущення допускає рівність кривин у напрямках осей, що приводить до похибок у визначенні середньої кривини, головних кривин і відношення головних кривин у вершині мікронерівностей.

Наприклад, завдання визначення головних кривин і відношення головних кривин у вершинах мікронерівностей вирішується таким чином: в двох перпендикулярних напрямках, які відповідають поздовжній і поперечній шорсткостям поверхні, знімаються профілоґрами, за ними визначаються радіуси кривин у вершинах мікронерівностей, які і приймаються за головні. Дослідження [55] точности цього методу визначення головних кривин і відношення головних кривин ($\boldsymbol{l}$) показало, що при відносній похибці при значеннях кута похибки $\boldsymbol{\psi} = 1^0, 3^0, 5^0, 10^0$ відношення кривини $\boldsymbol{l}$ міняється від 1 до 0,0004. Так, при $\boldsymbol{l} \geq 0{,}126$ метод дає задовільні результати. При малому відношенні кривин ($\boldsymbol{l} < 0{,}126$) із зменшенням $\boldsymbol{l}$ похибка катастрофічно зростає, що веде до непридатности формули для визначення ексцентриситету. Тому, необхідно було знайти метод визначення головних кривин, який не вимагає визначення поздовжнього та поперечного напрямків на поверхні і, таким чином, не був би пов'язаний з кутом похибки $\boldsymbol{\psi}$.

Для опису статистично однорідної ізотропної поверхні в [56 – 62] при дослідженні поверхні океану при хвилюванні і в [37] при вивченні ізотропної поверхні твердого тіла застосували випадкову функцію для двох змінних $\mathbf{z=z(x,y)}$, яка має автокореляційну функцію $\mathbf{R(x,y)}$ [37] і допускає її спектральний розклад Фур'є $\mathbf{\Phi(k_x,k_y)}$ на гармонійні компоненти $\boldsymbol{k}_x$, $\boldsymbol{k}_y$ хвильового вектора $\vec{\mathbf{K}}$ [37], при цьому характеристики поверхні можна виразити через моменти спектральної щільности (СЩ).

Лонге-Гіґґінс отримав співвідношення для щільности піків анізотропної ґауссовської поверхні [60, 61], а в [56] розглядає питання про кутові коефіцієнти і ґрадієнти такої поверхні.

Наближені методи отримання характеристик анізотропної поверхні на основі теорій випадкових функцій і з використанням кривої опорної поверхні, а також пов'язані з ними методи розрахунків фактичної площі контакту, оцінки триботехнічних властивостей контактуючої поверхні узагальнені в [22, 31].

Найяк [37] отримав розподіл висот вершин, середню кривину у вершині та ґрадієнт ізотропної поверхні, а також висоти та кривини піків і кутовий коефіцієнт профілоґрами цієї ж поверхні.

Взагалі, апроксимація $\mathbf{R(x,y)}$ функціями визначеного виду [49, 52, 63 – 66] веде до згрублення випадкового процесу і може бути джерелом похибок при визначенні спектральної щільности розподілу висот вершин. Необґрунтованість подібного підходу показана в [37].

Використовуючи модель випадкового поля шорсткої поверхні і не пов'язуючи її з АКФ якогось певного виду, не використовуючи припущення, які прийняті для опису поверхні одномірними випадковими функціями або поверхні з сильною анізотропією і орієнтованими мікронерівностями, а також не припускаючи певної форми нерівностей, в [54, 55, 67 – 71] отримано співвідношення для законів розподілення та їх основних параметрів анізотропних поверхонь: щільности ймовірности висот вершин, середньої кривини у вершині мікронерівностей, ґрадієнту поверхні, повної кривини у вершині, головних кривин і співвідношення головних кривин у вершині мікронерівностей анізотропної поверхні, а також для середньої висоти виступів шорсткої поверхні і щільности плям контакту при сполученні шорсткої поверхні з рівною.

При цьому, з опису топографії анізотропної поверхні як частинний випадок витікали результати для ізотропної поверхні, які для щільности ймовірности висот вершин, середньої кривини мікронерівностей поверхні у вершині та ґрадієнта, приведені до раніше відомих результатів [37], крім того, дослідження фактичної площини контакту за методами опорних кривих і випадкового поля показало, що запропонована в [68] модель опису анізотропної поверхні випадковим полем дає розрахунок ФПК близький до експериментального [72], що дозволяє прийняти цю модель у подальших теоретичних дослідженнях контактних явищ на шорстких поверхнях твердих тіл, як таку, що описує анізотропну шорстку поверхню з високою надійністю та точністю. Тому, необхідно дослідити ізотропність шорсткої поверхні твердих тіл.

I. Теоретична частина

Існує дві точки зору на поняття ізотропности поверхонь: 1) при статистичній оцінці шорстку ізотропну поверхню визначають як поверхню, яка змодельована у вигляді набору сфер [3 – 11]; 2) у низці робіт [47, 73] розуміють ізотропність в тому смислі, як вона визначена в теорії випадкового поля.

У теорії випадкового поля $\mathbf{z = \boldsymbol{f}(x, y)}$ ізотропним прийнято називати поле, автокореляційна функція $\mathbf{R\,(x, y)}$ [37, 68, 74, 75] якого залежить лише від змінної $\mathbf{r = (x^2 + y^2)^{1/2}}$ і не залежить від полярного кута $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{arctg(y/x)}$, а спектральна щільність $\mathbf{\Phi\,(k_x, k_y)}$ [37, 68, 74, 75] залежить тільки від змінної $\mathbf{k} \equiv \left|\vec{\mathbf{k}}\right|$ [29].

За теорією випадкового поля, ізотропна поверхня уявляє собою поверхню, яка змодельована виступами, що відрізняються головними кривинами у вершинах нано- та мікронерівностей (наприклад, цю умову задовольняє еліпсоїдна модель), причому розподіл кута повороту виступів є рівномірним [29]. При такому означенні ізотропности на форму нано- та мікронерівностей не накладуються **a priori** певні обмеження.

Ці два означення ізотропности не є тотожними. Поверхня може бути змодельована набором сфер, а $\mathbf{R\,(x, y)}$ при цьому буде залежати від полярного кута $\boldsymbol{\theta}$.

Нехай $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H_2}$ – головні кривини, а $\boldsymbol{l} = \mathbf{H_1/H_2}$ – співвідношення головних кривин [55]. Із означення ізотропности за ідеальною сферичною моделлю витікає, що для ізотропної поверхні головні кривини та співвідношення головних кривин дорівнюють:

$$EH_1(\varepsilon_1') = EH_2(\varepsilon_1'); \quad El(\varepsilon_1') = 1, \qquad \textbf{(1)}$$

де **E** – знак математичного сподівання;

$\varepsilon_1' = \dfrac{z}{\sigma} = \dfrac{\varepsilon_1}{\sqrt{m_{00}}}$ – безрозмірна зведена (приведена) висота;

$\mathbf{m_{00}}$ – момент нульового порядку спектральної щільности анізотропної поверхні при p=0, q=0 [37, 61, 68];

$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$, де σ^2 – дисперсія висот вершин нерівностей.

Визначимо ці величини для анізотропної поверхні, яка описується випадковим полем, а потім запишемо отримані співвідношення для ізотропної поверхні.

Нехай $\mathbf{H_1 \geq H_2}$. У вершинах мікронерівностей будемо мати [55]:

- для середньої кривини:

$$\overline{H} = -m_{22}^{1/2} t\,; \qquad \textbf{(2)}$$

- для повної кривини:

$$K = m_{22}\left(t^2 - \rho^2\right), \qquad \textbf{(3)}$$

де $\mathbf{m_{22}}$ – момент четвертого порядку спектральної щільности анізотропної поверхні при p=2, q=2 [37, 61, 68];

t, ρ, φ – змінні, які пов'язані з $\varepsilon_4 = \partial^2 z / \partial x^2$; $\varepsilon_5 = \partial^2 z / \partial x \partial y$; $\varepsilon_6 = \partial^2 z / \partial y^2$ співвідношеннями [55, 68, 75].

Використовуючи відоме [55, 76, 77] співвідношення між повною **K**, середньою $\overline{\mathbf{H}}$ і головними кривинами $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H_2}$ для вершин нано- та мікронерівностей отримаємо [55]:

- $$\boldsymbol{H_1} = \overline{H} - \sqrt{\overline{H}^2 - K} = \overline{H} - m_{22}^{1/2}\rho = -m_{22}^{1/2} t - m_{22}^{1/2}\rho\,; \qquad \textbf{(4)}$$

- $$\boldsymbol{H_2} = \overline{H} + \sqrt{\overline{H}^2 - K} = \overline{H} + m_{22}^{1/2}\rho = -m_{22}^{1/2} t + m_{22}^{1/2}\rho\,; \qquad \textbf{(5)}$$

- $$\boldsymbol{l} = \frac{H_1}{H_2} = \frac{-t-\rho}{-t+\rho} = \frac{t+\rho}{t-\rho}. \qquad \textbf{(6)}$$

Математичні сподівання головних кривин і відношення головних кривин анізотропної поверхні у вершині нано- та мікронерівностей висотою ε_1' визначається так [55, 76, 77]:

- $$\boldsymbol{EH_1}(\varepsilon_1') = E\overline{H}(\varepsilon_1') - m_{22}^{1/2}\frac{\iiint\limits_{V_1} \rho p(\varepsilon_1', t, \rho, \varphi)\, dt d\rho d\varphi}{\iiint\limits_{V_1} p(\varepsilon_1', t, \rho, \varphi)\, dt d\rho d\varphi}; \qquad \textbf{(7)}$$

- $$\boldsymbol{EH_2}(\varepsilon_1') = E\overline{H}(\varepsilon_1') + m_{22}^{1/2}\frac{\iiint\limits_{V_1} \rho p(\varepsilon_1', t, \rho, \varphi)\, dt d\rho d\varphi}{\iiint\limits_{V_1} p(\varepsilon_1', t, \rho, \varphi)\, dt d\rho d\varphi}; \qquad \textbf{(8)}$$

- $$\boldsymbol{El}(\varepsilon_1') = \frac{\iiint\limits_{V_1} \left(\dfrac{t+\rho}{t-\rho}\right) p(\varepsilon_1', t, \rho, \varphi)\, dt d\rho d\varphi}{\iiint\limits_{V_1} p(\varepsilon_1', t, \rho, \varphi)\, dt d\rho d\varphi}, \qquad \textbf{(9)}$$

де об'єм (простір) інтеґрування $\mathbf{V_1(t, \rho, \varphi)}$ визначається нерівностями [68, 75]:

$$\begin{cases} t < 0 \\ 0 \leq \rho \leq -t \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\,. \end{cases}$$

Або ці величини визначаються так [55]:

- $$\boldsymbol{EH_1}(\varepsilon_1') = E\overline{H}(\varepsilon_1') - m_{22}^{1/2}\frac{T(\varepsilon_1')}{p(\varepsilon_1')}; \qquad \textbf{(10)}$$

- $$\boldsymbol{EH_2}(\varepsilon_1') = E\overline{H}(\varepsilon_1') + m_{22}^{1/2}\frac{T(\varepsilon_1')}{p(\varepsilon_1')}; \qquad \textbf{(11)}$$

- $$\boldsymbol{El}(\varepsilon_1') = \frac{W(\varepsilon_1')}{p(\varepsilon_1')}, \qquad \textbf{(12)}$$

де функції $T(\varepsilon_1')$ і $W(\varepsilon_1')$ визначаються таким чином [55]:

- $$\begin{aligned}\boldsymbol{T}(\varepsilon_1') = {} & \frac{m_{00}^{1/2} m_{22}^{5/2}}{4\pi^3 \Delta^{1/2} D} \exp\left[-\frac{\Delta_2 m_{00}}{2\Delta_{12}}(\varepsilon_1')^2\right] \times \\ & \times \int\limits_{-\infty}^{0} \exp(A_1 t^2 + A_7 \varepsilon_1' t)\, dt \int\limits_{0}^{-t} (t^2 - \rho^2)\rho^2 d\rho \times \\ & \times \int\limits_{0}^{2\pi} \exp\left[A_4 \rho^2 \cos^2\varphi + A_5 \rho^2 \cos\varphi \sin\varphi + \right. \\ & + A_6 \rho^2 \sin^2\varphi + (A_2 t + A_8 \varepsilon_1')\rho\cos\varphi + \\ & \left. + (A_3 t + A_9 \varepsilon_1')\rho \sin\varphi\right] d\varphi\,; \end{aligned} \qquad \textbf{(13)}$$

- $$\begin{aligned}\boldsymbol{W}(\varepsilon_1') = {} & \frac{m_{00}^{1/2} m_{22}^{5/2}}{4\pi^3 \Delta^{1/2} D} \exp\left[-\frac{\Delta_2 m_{00}}{2\Delta_{12}}(\varepsilon_1')^2\right] \times \\ & \times \int\limits_{-\infty}^{0} \exp(A_1 t^2 + A_7 \varepsilon_1' t)\, dt \int\limits_{0}^{-t} (t + \rho)^2 \rho\, d\rho \times \\ & \times \int\limits_{0}^{2\pi} \exp\left[A_4 \rho^2 \cos^2\varphi + A_5 \rho^2 \cos\varphi \sin\varphi + \right. \\ & + A_6 \rho^2 \sin^2\varphi + (A_2 t + A_8 \varepsilon_1')\rho\cos\varphi + \\ & \left. + (A_3 t + A_9 \varepsilon_1')\rho \sin\varphi\right] d\varphi\,, \end{aligned} \qquad \textbf{(14)}$$

де $\Delta, \Delta_{12}, \Delta_1, \ldots, \Delta_9$ – визначники [68, 75];

D – щільність вершин [37, 60];

$A_1, \ldots, A_9$ – вирази [68, 75].

Для ізотропної поверхні вирази (13) і (14) набувають такого вигляду [55]:

$$\bullet\ T(\varepsilon_1') = \frac{(3C_1)^{1/2}}{(2\pi)^2}\exp\left[-C_1(\varepsilon_1')^2\right]\times \int_{-\infty}^{0}\exp\left[-\frac{1}{2}(C_1 t + C_2\varepsilon_1' t)\right]dt \times \int_0^{-t}(t^2-\rho^2)\rho^2 d\rho\int_0^{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}\rho^2\right)d\varphi; \quad (15)$$

$$\bullet\ W(\varepsilon_1') = \frac{(3C_1)^{1/2}}{(2\pi)^2}\exp\left[-C_1(\varepsilon_1')^2\right]\times \int_{-\infty}^{0}\exp\left[-\frac{1}{2}(C_1 t + C_2\varepsilon_1' t)\right]dt \times \int_0^{-t}(t+\rho)^2\rho d\rho\int_0^{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}\rho^2\right)d\varphi. \quad (16)$$

Після інтеґрування (15), (16) отримаємо:

$$\bullet\ T(\varepsilon_1') = \frac{\sqrt{3C_1}}{2\pi}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}J_4 + 3J_3\right]; \quad (17)$$

$$\bullet\ W(\varepsilon_1') = \frac{\sqrt{3C_1}}{2\pi}\left[\left(\frac{1}{C_1}+2\right)J_0 + \varepsilon_1'\sqrt{\frac{3}{\alpha}}J_1 - 2J_2 + \sqrt{2\pi}J_5\right], \quad (18)$$

де інтеграли $J_0, J_1, \ldots, J_5$ [37, 55, 68, 75]:

$$\bullet\ J_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2C_1}}\exp\left[-\frac{(\varepsilon_1')^2}{2}\right](1+erf\beta); \quad (19)$$

$$\bullet\ J_1 = \frac{1}{C_1}\left\{\exp\left[-C_1(\varepsilon_1')^2\right] + \beta\sqrt{\pi}\exp\left[-\frac{(\varepsilon_1')^2}{2}\right](1+erf\beta)\right\}; \quad (20)$$

$$\bullet\ J_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2(1+C_1)}}\exp\left[-\frac{\alpha(\varepsilon_1')^2}{2(\alpha-1)}\right](1+erf\gamma); \quad (21)$$

$$\bullet\ J_3 = \frac{2}{C_1^2}\left\{\exp\left[-C_1(\varepsilon_1')^2\right](1+\beta^2) + \sqrt{\pi}\exp\left[-\frac{(\varepsilon_1')^2}{2}\right](1+erf\beta)(\beta^3+3\beta/2)\right\}; \quad (22)$$

$$\bullet\ J_4 = \exp\left[-C_1(\varepsilon_1')^2\right]\int_{-\infty}^{0}(t^2-3)\times erf\left(-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\exp\left[-\frac{1}{2}(C_1 t^2 + C_2\varepsilon_1' t)\right]dt; \quad (23)$$

$$\bullet\ J_5 = \exp\left[-C_1(\varepsilon_1')^2\right]\int_{-\infty}^{0} t\cdot erf\left(-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\times \exp\left[-\frac{1}{2}(C_1 t^2 + C_2\varepsilon_1' t)\right]dt, \quad (24)$$

де $C_1 = \alpha/(2\alpha-3)$; $\alpha = m_0 m_4/m_2^2$; $C_2 = C_1\sqrt{\frac{12}{\alpha}}$.

Виходячи з виразів (2) – (18) та виразів для $p(\varepsilon_1')$ і $E\overline{H}(\varepsilon_1')$ для ізотропної поверхні [55, 68, 75] вирази для математичного сподівання головних кривин і співвідношення головних кривин у вершині нано- та мікронерівностей ізотропної поверхні будуть мати вигляд [55]:

$$\bullet\ EH_1(\varepsilon_1') = \sqrt{\frac{m_4}{3}}\times\left[\frac{\frac{\varepsilon_1'}{C_1}\sqrt{\frac{3}{\alpha}}J_0 + \left(\frac{2}{C_1} + \frac{3(\varepsilon_1')^2}{\alpha} - 2\right)J_1 - J_3 - \sqrt{\frac{\pi}{2}}J_4}{\left(\frac{1}{C_1}-2\right)J_0 + \varepsilon_1'\sqrt{\frac{3}{\alpha}}J_1 + 2J_2}\right]; \quad (25)$$

$$\bullet\ EH_2(\varepsilon_1') = \sqrt{\frac{m_4}{3}}\times\left[\frac{\frac{\varepsilon_1'}{C_1}\sqrt{\frac{3}{\alpha}}J_0 + \left(\frac{2}{C_1} + \frac{3(\varepsilon_1')^2}{\alpha} - 2\right)J_1 + 5J_3 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}J_4}{\left(\frac{1}{C_1}-2\right)J_0 + \varepsilon_1'\sqrt{\frac{3}{\alpha}}J_1 + 2J_2}\right]; \quad (26)$$

$$\bullet\ El(\varepsilon_1') = \frac{\left(\frac{1}{C_1}+2\right)J_0 + \varepsilon_1'\sqrt{\frac{3}{\alpha}}J_1 - 2J_2 + \sqrt{2\pi}J_5}{\left(\frac{1}{C_1}-2\right)J_0 + \varepsilon_1'\sqrt{\frac{3}{\alpha}}J_1 - 2J_2}, \quad (27)$$

де $m_4 = 3m_{22} = m_{40} = m_{04}$ – момент четвертого порядку спектральної щільности ізотропної поверхні [37, 75].

Визначимо ці величини для ізотропної поверхні при $\alpha \to \infty$ за (25) – (27), тоді інтеґрали J_4, J_5 приймають вигляд [55]:

- $$\boldsymbol{J_4} = \exp\left[-\frac{1}{2}(\varepsilon_1')^2\right]\int_{-\infty}^{0}(t^2-3)erf\left(-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{1}{4}t^2\right)dt = \exp\left[-\frac{1}{2}(\varepsilon_1')^2\right]\times \qquad \textbf{(28)}$$
$$\times 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{2}{3}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}arcctg\sqrt{2}\right);$$

- $$\boldsymbol{J_5} = \exp\left[-\frac{1}{2}(\varepsilon_1')^2\right]\int_{-\infty}^{0}t\cdot erf\left(-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{1}{4}t^2\right)dt = -2\sqrt{\frac{2}{3}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\varepsilon_1')^2\right]. \qquad \textbf{(29)}$$

Формули для розрахунку математичного сподівання безрозмірних головних кривин і співвідношення головних кривин для ізотропної поверхні набувають вигляду [55]:

- **при α → ∞**:

$$\frac{EH_1(\varepsilon_1')}{\sqrt{m_4}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}arcctg\sqrt{2} = \qquad \textbf{(30)}$$
$$= 0{,}944140745;$$

$$\frac{EH_2(\varepsilon_1')}{\sqrt{m_4}} = \frac{13}{3\sqrt{\pi}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}arcctg\sqrt{2} = \qquad \textbf{(31)}$$
$$= 2{,}064870367,$$

за (30), (31)

$$El(\varepsilon_1') = \frac{EH_1(\varepsilon_1')}{EH_2(\varepsilon_1')} = 0{,}457239718 \approx \qquad \textbf{(32)}$$
$$\approx 0{,}457... < 1;$$

- **при α = 1,5** співвідношення головних кривин дорівнює:

$$El(\varepsilon_1') = 0{,}333(3)... < 1. \qquad \textbf{(33)}$$

Крім того, проведемо оцінку математичного сподівання $El(\varepsilon_1')$ за двома формулами: **1) замінюючи** у виразах (4) – (6) величини **$\mathbf{H_1}$**, **$\mathbf{H_2}$**, **К** їх математичними сподіваннями, тоді **при α → ∞** будемо мати [55]:

$$E\bar{l}(\varepsilon_1') \approx \frac{E\overline{H}(\varepsilon_1')-\sqrt{\left[E\overline{H}(\varepsilon_1')\right]^2-EK(\varepsilon_1')}}{E\overline{H}(\varepsilon_1')+\sqrt{\left[E\overline{H}(\varepsilon_1')\right]^2-EK(\varepsilon_1')}} \approx \qquad \textbf{(34)}$$
$$\approx 0{,}600 < 1.$$

2) замінимо в (7) величини **$\mathbf{H_1}$** і **$\mathbf{H_2}$** їх математичними сподіваннями $EH_1(\varepsilon_1')$ (10) і $EH_2(\varepsilon_1')$ (11), тоді **при α → ∞** будемо мати:

$$El(\varepsilon_1') \approx \frac{EH_1(\varepsilon_1')}{EH_2(\varepsilon_1')} \approx 0{,}458... < 1. \qquad \textbf{(35)}$$

Таким чином, ідеальна сферична модель ізотропної поверхні, передбачаючи, що всі вершини нано- та мікровиступів мають вигляд сфер, приводить до співвідношення головних кривин $El(\varepsilon_1') = 1$, а для ізотропної поверхні, змодельованої випадковим полем, отримуємо $El(\varepsilon_1') = (0{,}333 - 0{,}600) < 1$ (рис. 1).

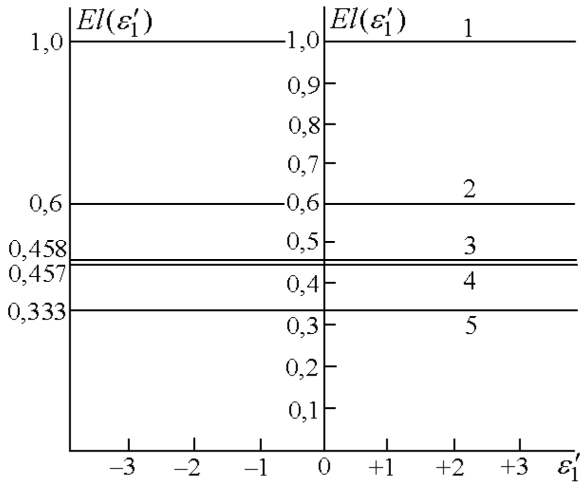

Рис. 1. Залежність математичного сподівання співвідношення головних кривин у вершині від безрозмірної зведеної висоти нано- та мікронерівностей ізотропної поверхні твердого тіла, описаної ідеальною сферичною моделлю (1) та моделлю випадкового поля (2-5) при широкосмужности спектру **α** → ∞ (2-4) та **α = 1**,5 (5).

Ці результати доводять, що в моделі шорсткої поверхні у вигляді ізотропного випадкового поля немає місця сферичній моделі. У той же час теорія випадкового поля не відкидає того положення, що окремі вершини ізотропної поверхні можуть мати вигляд сфер, але показує, що всі вершини одночасно не можуть бути сферами.

Величину $El(\varepsilon_1')$ можна отримати осередненням величин $l_i(\varepsilon_1')$, де $l_i(\varepsilon_1')$ – співвідношення головних кривин в *i*-тій вершині висотою ε_{1i}'. Ясно, що $El(\varepsilon_1')$ дорівнює одиниці тільки в тому випадку, коли всі $l_i(\varepsilon_1') = 1$. Так як $E\bar{l}(\varepsilon_1') < 1$, то ізотропна поверхня, що змодельована випадковим полем, має вершини, для яких $l_i(\varepsilon_1') < 1$, тобто має місце наявність несферичних виступів.

Висновки

Ідеальна сферична модель в загальному випадку не має місця під час моделювання нано- та мікрошорсткої поверхні ізотропним випадковим полем, бо завжди, поруч зі сферичними виступами, має місце наявність несферичних виступів. Цей факт необхідно враховувати під час опису фізико-хемічних явищ і процесів, які відбуваються на нано- та мікрошорстких поверхнях твердих тіл.

Література

1. **Крагельський И.В.** Трение и износ. – М.: Машиностроение, 1968. – 480 с.
2. **Мур Д.** Трения и смазка эластомеров / Пер. с англ. Г.И. Бродского. – М.: Химия, 1977. – 264 с.
3. **Демкин Н.Б.** Геометрия и механика контактирования шероховатых тел // Теория трения, износа и проблемы стандартизации. – Брянск: Брянское книжное изд-во, 1978. – С. 274.
4. **Демкин Н.Б.** Контактирование шероховатых поверхностей. – М.: Наука, 1970. – 227 с.
5. **Журавлев В.А.** К вопросу о теоретическом обосновании закона Амонтона-Кулона для трения несмазанных поверхностей // Журнал технической физики. – 1940. – Т.10. – Вип. 17. – С.1447.
6. **Крагельський И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С.** Основы расчетов на трение и износ. – М.: Машиностроение, 1977. – 526 с.
7. **Archard J.E.** Elastic Deformation and the Contact of Surfaces // Nature. – 1951. – Vol.192. – P. 918.
8. **Archard J.E.** Elastic Deformation and the laws of friction // Proc. Roy. Soc. – 1957. – Ser. A. – Vol.243. – N1233. – P. 190.
9. **Greenwood J.A., Williamson J.B.P.** Contact of Nominality Flat Surfaces // Proceedings of the Royal Society. – 1966. – Vol.295. – Ser. A., N1442 – P. 300.
10. **Longe A.S., Howell H.G.** Friction of Elastic Solids // The Proceedings of the Physical Society. – 1954. – Vol.67, N410. – P. 89.
11. **Schallamach A.** The Load Dependence of Rubber Friction // The Proceedings of the Physical Society. – 1952. – Vol.65B. – P. 647.
12. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров / Пер. И.Г. Арамановича, А.М. Березмана, И.А. Вайнштейна и др. – М.: Наука, 1978. – 832 с.
13. **Крагельський И.В.** Влияние различных параметров на величину коэффициента трения несмазанных поверхностей // Журнал технической физики. – 1943. – Т.13. – Вип. 13. – 145 с.
14. **Крагельський И.В.** Трение покоя двух шероховатых поверхностей // Известия АН СССР, ОТН. – 1948. – №10. – С. 1621.
15. **Rubinstein C.** A general theory of the surface friction of solids// Proc. Phys. Soc. – 1956. – Sect. B, Vol.69. – P. 921.
16. **Площадь фактического** контакта сопряженных поверхностей / П.Е. Дьяченко, Н.Н. Толкачева, Г.А. Андреева, Т.М. Карпова. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 95 с.
17. **Joshimoto G., Tsukizoe T.** On the Mechanism of wear between Metal Surfaces // Wear. – 1958. – Vol.1, N6. – P. 472.
18. **Kubo M. Peklenik J.** An analysis of micro-geometrical isotropy for random surfaces structures // Ann. of CIRP. – 1968. – Vol.16. – P. 235.
19. **Bowden F.P., Tabor D.** The friction and lubrication of solids // Clarendon Press. – Oxford. – 1954. – P. 372.
20. **Hisacado T.** On the mechanism of Contact between Solid Surfaces (4^{th} report). Surface Roughness Effects on Dry Friction // Bull. ISME. – 1970. – Vol.13, N55 – P. 129.
21. **Ling F.F.** On Asperity Distributions of Metallic Surfaces // J. of Appl. Physics. – 1958. – Vol.29, N8. – P. 1168.
22. **Айнбиндер С.Б., Тюнина Э.Л.** Введение в теорию полимеров. – Рига: Зинатне, 1978. – 224 с.
23. **Lubricant films** in rolling contact of rough surfaces / T.E. Tallian, Y.P. Chui, D.F. Huttenlocher, J.S. Kamenshine, L.B. Sibley, N.E. Sindlinger // Transactions of the ASLE. – 1964. – Vol.7. – P. 109.
24. **Thomas T.R.** Recent advances in the measurement and analysis of surface micro-geometry // Wear. – 1975. – Vol.33, N2. – P. 205.
25. **Дунин-Барковский И.В., Карташова А.Н.** Измерение и анализ шероховатости, волнистости и некруглости поверхности. – М.: Машиностроение, 1978. – 232 с.
26. **Назаров Ю.Ф., Шкилько А.М., Тихоненко В.В., Компанеец И.В**. Методы исследования и контроля шероховатости поверхности металлов и сплавов // ФІП. – 2007. – Т.5. – №3-4. – С. 207 – 216.
27. **Прилуцький В.А.** Технологические методы снижения волнистости поверхностей. – М.: Машиностроение, 1978. – 136 с.
28. **Трение, изнашивание и смазки:** Справочник в 2-х кн. / Под ред. И.В. Крагельского, В.В. Алисина. – М.: Машиностроение, 1978. – Кн. 1: 400 с. – 1979. – Кн. 2: 358 с.
29. **Хусу А.П., Виттенберг Ю.Р., Пальмов В.А.** Шероховатость поверхностей. Теоретико-вероятностный подход. – М.: Наука, 1975. – 344 с.
30. **Friction, Wear, Lubrication.** Tribology handbook. Vol. 3 / Edited by I.V. Kragelsky, V.V. Alisin. Mir Publishers, Moscow. Vol. 1: 385 p. (1981). Vol. 2: 281 p. (1981). Vol. 3: 264 p. (1982).
31. **Комбалов В.С.** Оценка триботехнических свойств контактирующих поверхностей. – М.: Наука, 1983. – 136 с.

32. **Комбалов В.С.** Состояние и перспективы работ по исследованию влияния шероховатости на фрикционные характеристики пар трения // Трение и износ. – 1980. – Т.1. – №3. – С. 440 – 452.
33. **Бендат Дж., Пирсол А.** Измерение и анализ случайных процессов / Пер. с англ. Г.В. Матушевского, В.Е. Привальского. – М.: Мир, 1971. – 408 с.
34. **Сигорский В.П.** Математический аппарат инженера. – К.: Техніка, 1977. – 768 с.
35. **Степнов М.Н.** Статистическая обработка результатов механических испытаний. – М.: Машиностроение, 1972. – 232 с.
36. **Peklenik J. C.I. R.P.** Annalen. – 1965. – V. XII. – №3. – S. 3 – 8.
37. **Найяк П.Р.** Применение модели случайного поля для исследования шероховатых поверхностей // Проблемы трения и смазки. – 1971. – Т.93. – Сер. F. – №3. – С. 85-95.
38. **Белый В.А., Свириденок А.И., Петроковец М.И., Савкин В.Г.** Трение полимеров. – М.: Наука, 1972. – 204 с.
39. **Польцер Г., Майсснер Ф.** Основы трения и изнашивание / Пер. с нем. О.Н. Озерского, В.Н. Пальянова. – М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.
40. **Abbot E.J., Firestone F.A.** Specifying surface quality // Mech. Eng. – 1933. – Vol.55. – P. 569.
41. **Михин Н.М.** Внешнее трение твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 222 с.
42. **Комбалов В.С.** Влияние шероховатости твердых тел на трение и износ. – М.: Наука, 1974. – 112 с.
43. **Комбалов В.С.** О комплексной оценке шероховатости поверхностей в задачах трения и износа и ее связи с величиной Δ^* // Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа. – М.: Наука, 1971. – С. 89.
44. **Рыжов Э.В., Рыбицкий В.А., Созин Ю.И., Щеголь Н.И.** Исследование качества поверхности при алмазном шлифовании износостойких наплавочных материалов // Трение и износ. – 1982. – Т.3. – №4. – С. 734 – 738.
45. **Рыжов Э.В., Рыбицкий В.А., Щеголь Н.И.** Математический метод расчета безразмерного комплекса для оценки шероховатости поверхности // Трение и износ. – 1981. – Т.2. – №5. – С. 904 – 907.
46. **Рыжов Э.В., Суслов А.Г., Улашкин У.П.** Комплексный параметр для оценки состояния поверхности трения // Трение и износ. – 1980. – Т.1. – №3. – С. 436 – 439.
47. **Ядренко М.И.** Спектральная теория случайных полей. – К.: Вища шк., 1980. – 208 с.
48. **Argatov I.I.** The theory of elastic nonsaturated contact between rough surfaces // Friction and wear. – 2003. – V.25. – №1. – P. 27 – 34.
49. **Рудзит Я.А.** Микрогеометрия и контактное взаимодействие поверхностей. – Рига: Зинатне, 1975. – 210 с.
50. **Харач Г.М., Экслер Л.И.** Об определении характеристик микрогеометрии поверхности со случайной шероховатостью при расчетах трения и износа // Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа. – М.: Наука, 1971. – С. 169.
51. **Cooper M.G., Mikis B.B., Yovanovich M.M.** Thermal contact conductance // International Journal of heat and mass transfer. – 1969. – Vol.12. – P. 279.
52. **Whitehouse D.J., Archard J.F.** The Properties of Random Surfaces of Significance in the contact // Proceedings of the Royal Soc. – 1970. – Vol.316. – Ser. A. – P. 97-121.
53. **Whitehouse D.J., Archard J.F.** The properties of random surfaces in contact // Surface Mechanics, Proceedings of the ASME Annual winter meeting. – Los Angeles, Calif. – 1969. – November. – P. 16-20.
54. **Семенюк Н.Ф.** Средняя высота выступов шероховатой поверхности и плотность пятен контакта при контактировании шероховатой поверхности с гладкой // Трение и износ. – 1986. – Т.7. – №1. – С. 85 – 90.
55. **Семенюк Н.Ф.**, **Сиренко Г.А.** Описание топографии анизотропных шероховатых поверхностей трения с помощью модели случайного поля: 2. Полная кривизна, главные кривизны и отношение главных кривизн в вершинах микронеровностей, удельная площадь гауссовской поверхности и удельный объем зазора // Трение и износ. – 1980. – Т.1. – №5. – С. 815 – 823.
56. **Лонге-Хиггинс М.С.** Статистическая геометрия случайных поверхностей // Гидродинамическая неустойчивость. – М.: Мир, 1964. – С.124 – 167.
57. **Gartwright D.E., Longuet-Higgins M.S.** The statistical distribution of the maxima of a random function // Proceedings of the Royal Soc. – London. – 1956. – Vol.237. – Ser. A., N1209 – P. 212.
58. **Longuet-Higgins M.S.** On the statistical distribution of the highs of sea waves // J. Marine Research. – 1952. – Vol.11. – N3. – P. 245.
59. **Longuet-Higgins M.S.** Statistical Properties of a moving waveform // Proc. Cambridge Philos. Soc. – London, 1956. – N52. – P. 234.
60. **Longuet-Higgins M.S.** Statistical Properties of an isotropic random surface // Philos. Trans. of the Royal Soc. – London, 1957. – Vol.250. – Ser. A. – P. 157-174.
61. **Longuet-Higgins M.S.** The Statistical Analysis of a Random Moving Surface // Philos. Trans. of the Royal

Soc. – London, 1957. – Vol.249. – Ser. A. – P. 321-387.
62. **Longuet-Higgins M.S.** The Statistical distribution of the curvature of a random Gaussian surface // Proc. Cambridge Philos. Soc. – London, 1958. – N54. – P. 439.
63. **Рудзит Я.А., Звиедрис А.В.** Методические основы определения более сложных статистических характеристик шероховатости // Приборостроение. – Вип. 9. – Рига: Рижский политехнический институт, 1973.
64. **Рудзит Я.А., Кризберг Ю.Я.** Расчет вероятносных характеристик микротопографических параметров шероховатых поверхностей, используемых в задачах трения и износа // Трение и износ. – 1982. – Т.3. – №6. – С. 1048 – 1057.
65. **Рудзит Я.А., Одитис И.А., Лининьш О.А.** Определение исходных параметров профиля нерегулярной шероховатости // Приборостроение. – Вип. 9. – Рига: Рижский политехнический институт, 1973. – С. 17.
66. **Рудзит Я.А., Одитис И.А.** О параметрах нерегулярной шероховатости поверхности // Приборостроение. – Вип. 8. – Рига: Рижский политехнический институт, 1972. – С. 3.
67. **Семенюк Н.Ф.** Исследования топографии поверхностей методом случайного поля и разработка расчетных методов оценки фактической площади контакта при трении твердых тел: Дис. … канд. техн. наук: 05.02.04. – Якутск: Ин-т физико-техн. проблем Севера СО ЯФ АН СССР, 1983. – 149 с.
68. **Семенюк Н.Ф.**, **Сиренко Г.А.** Описание топографии анизотропных шероховатых поверхностей трения с помощью модели случайного поля: 1. Распределение высот вершин, средняя кривизна в вершинах, градиент поверхности // Трение и износ. – 1980. – Т.1. – №3. – С. 465 – 471.
69. **Семенюк Н.Ф., Сиренко Г.А.** Топография и контактные явления анизотропных шероховатых поверхностей трения // Тез. докл. Всесоюз. науч.-техн. конфер. «Трибоника и антифрикционное материаловедение». – Новочеркасск. 27-29.05.1980. – Новочеркасск: Изд-во Новочеркас. политех. ин-та, 1980. – С. 22.
70. **Semenjuk N.F.** Entwicklung von Berechnungsverfahren der Reibungs und Verschlei.theorie mit Hilfe des Modells stochastischer Felder: Diss. B an der Technisen Hochschule Zittau. –Zittau, 1991. – 160 s.
71. **Sirenko G., Semenyuk M.** Surface Phenomena on Rough Mating Surfaces Modelled by an Anisotropic Random Fields // Abstracts, information and participants Ukrainian-French Symposium << Condensed Matter: Science and Industry. – Lviv, 20-27 February 1993. – Lviv: IPhCS NANU, 1993. – P. 60.
72. **Семенюк Н.Ф., Калмыкова Т.Ф.** Фактическая площадь упругого контакта анизотропной шероховатой поверхности с гладкой // Трение и износ. – 1983. – Т.4. – №3. – С. 467– 475.
73. **Khmyl A.A., Dostanko A.P., Anisimovich V.G., Chizhik S.A.** Effect of polishing on steel surface roughness and contact performance // Friction and wear. – 1996. – V.18. – №4. – P. 491 – 496.
74. **Сіренко Г.О., Солтис Л.М.** Моделі нанометричної та мікрометричної шорсткості поверхні твердих тіл (Огляд) // Фізика і хімія твердого тіла. – 2010. – Т. 11. – № 2. – С. 423 – 446.
75. **Сіренко Г.О., Семенюк М.Ф., Солтис Л.М.** Щільність ймовірностей розподілу висот вершин шорстких поверхонь твердих тіл, змодельованих випадковим полем // Фізика і хімія твердого тіла. – 2010. – Т. 11. – № 3. – С. 768 – 779.
76. **Семенюк Н.Ф.** Средние значения полной и средней кривизн в вершинах, высоты неровностей анизотропной шероховатой поверхности // Трение и износ. – 1986. – Т.7. – № 5. – С. 830 – 840.
77. **Семенюк Н.Ф.** Плотность вероятности высот вершин. Характеристики вершин анизотропной шероховатой поверхности // Трение и износ. – 1986. – Т.7. – № 6. – С. 1017 – 1024.

Семенюк М.Ф. – доктор технічних наук, професор, професор катедри машинознавства.

Сіренко Г.О. – доктор технічних наук, професор, завідувач катедри теоретичної та прикладної хемії.

Солтис Л.М. – аспірант катедри теоретичної та прикладної хемії.

Рецензент

Мідак Л.Я. – кандидат хімічних наук, доцент катедри теоретичної та прикладної хемії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.