
МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

УДК 621.891+621.89+621.567; 539.62

Г.О. Сіренко¹, М.Ф. Семенюк², Л.М. Солтис¹

Методика експериментального дослідження нано- та мікрошорсткості поверхні за допомогою моделі випадкового поля

¹Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
вул. Шевченка, 57, м. Івано-Франківськ, 76025, Україна
²Хмельницький національний університет,
вул. Інститутська, 11, м. Хмельницький, 29016, Україна

Розглянуті методи та методика дослідження нано- та мікрошорстких поверхонь, змодельованих анізотропним та ізотропним випадковим полем.

Ключові слова: методика, метод, наношорсткість, мікрошорсткість, анізотропія, ізотропія, модель, випадкове поле, профілограма.

H.O. Sirenko¹, M.F. Semenyuk², L.M. Soltys¹

The Method of Experimental Research of Nano- and Microrough Surface Using the Model of Random Field

¹Vasyl Stefanyk' Precarpathian National University,
57, Shevchenko Str., Ivano-Frankivsk, 76025, Ukraine
²Khmelnitsky National University,
11, Instytutska Str., Khmelnytsky, 29016, Ukraine

The methods and technique of research of nano- and microrough surfaces modeled by anisotropic and isotropic random field have been considered.

Key words: technique, method, nanoroughness, microroughnesss, anisotropy, isotropy, model, random field, profilogram.

Стаття постуила до редакції 14.04.2010; прийнята до друку 28.05.2010.

Вступ

Використовуючи модель випадкового поля шорсткої поверхні і не пов'язуючи її з автокореляційною функцією (АКФ) якогось певного виду, і не використовуючи припущення, які прийняті для опису поверхні одномірними випадковими функціями або поверхні з сильною анізотропією і орієнтованими мікронерівностями, а також не припускаючи певної форми нерівностей, в [1–42] отримано співвідношення для щільності ймовірності розподілу висот вершин, розподілу кривин у вершинах

нерівностей, розподілу градієнту анізотропної поверхні.

У [1–13, 16, 24, 38–42] показана придатність теорії випадкового поля для опису топографії гауссовських поверхонь і контактних явищ, при цьому порівняння розрахунків фактичної площі контакту (ФПК) пружного контакту шорсткої гауссовської анізотропної поверхні з рівною методом випадкового поля з результатами експериментального визначення ФПК оптико-акустичним методом показало на близькість експериментальних даних і результатів розрахунків.

Загальна теорія випадкового поля викладена в [43, 44]. Для інтегральних перетворень використали [45–46].

Мета роботи полягала в тому, щоби, на підставі математичного опису профілограми, розробити методику для розрахунків параметрів поверхні.

I. Теоретична частина

1. Опис випадкових процесів і випадкових полів для нано- та мікрошорстких поверхонь.

1.1. Автокореляційна функція шорсткої поверхні.

Нехай анізотропна шорстка поверхня описана рівнянням $z = z(x, y)$, де z – випадкова функція для двох змінних x і y (випадкове поле), а x, y – декартові координати на середній площині висот шорсткої поверхні, але разом з тим статистичні характеристики поверхні залежать від напрямків $\theta = \arctg(k_x/k_y)$ та інваріантні до переміщення початку координат на поверхні (однорідна поверхня). У якості поверхні, від якої здійснюється відлік висот, є площина, яка відповідає середній висоті шорсткої поверхні.

Випадкова функція z , яка описує таку шорстку статистично однорідну анізотропну поверхню, має автокореляційну функцію $R(x, y)$ і допускає її спектральний розклад Фур'є $\Phi(k_x, k_y)$ на гармонічні компоненти, де k_x, k_y – компоненти хвильового вектора \bar{k} , який дорівнює $\bar{k} = 2\pi / \lambda$ з довжиною хвилі λ .

Тоді автокореляційна функція за означенням дорівнює [16]:

$$R(x, y) = \lim_{\substack{L_1 \rightarrow \infty \\ L_2 \rightarrow \infty}} \frac{1}{4L_1L_2} \times \int_{-L_1}^{L_1} \int_{-L_2}^{L_2} z(x_1, y_1) z(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y) dx_1 dy_1. \quad (1)$$

Якщо шорстка поверхня ізотропна, то функція $R(x, y)$ залежить лише від змінної $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ і не залежить від полярного кута $\theta = \arctg(y/x)$.

1.2. Спектральною щільністю (СЩ) шорсткої поверхні є перетворення Фур'є від функції $R(x, y)$ [16]:

$$\Phi(K_x, K_y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(x, y) \times \exp[-i(xK_x + yK_y)] dx dy, \quad (2)$$

а зворотне перетворення $\Phi(k_x, k_y)$ [16]:

$$R(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(K_x, K_y) \times \exp[i(xK_x + yK_y)] dK_x dK_y. \quad (3)$$

З виразу (1) видно, що $R(0, 0) = \sigma^2$, де σ^2 – дисперсія, а σ – середнє квадратичне (стандартне) відхилення висоти нерівностей [16, 17]. Тому з (3) витікає [16, 17]:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_x, k_y) dk_x dk_y. \quad (4)$$

Вираз (4) відбиває те, що функція $\Phi(k_x, k_y)$ визначає той внесок у величину дисперсії σ^2 , який додає різні спектральні компоненти, що відповідають хвилям з хвильовим числом k і довжинами [16]:

$$\lambda = 2\pi / |k| \quad (5)$$

та напрямками [16]:

$$\theta = \arctg(k_x / k_y). \quad (6)$$

Для ізотропних поверхонь функція Φ залежить тільки від змінної $k \equiv |k|$.

Моменти спектральної щільності шорсткої поверхні (СЩ) визначаються так [16, 17]:

$$m_{pq} = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_x, k_y) k_x^p k_y^q dk_x dk_y, \quad (7)$$

де Re – дійсна частина числа.

$$\text{Згідно (7) маємо: } m_{00} = \sigma^2. \quad (8)$$

1.3. Щільність ймовірностей розподілу висот вершин випадкової шорсткої поверхні.

1.3.1. Анізотропна поверхня. Залежність щільності ймовірностей розподілу висот вершин анізотропної поверхні [1, 5] від $\varepsilon'_1 = z/m_{00} = z/\sigma$ – безрозмірної (нормованої) висоти:

$$p_{sum}(\varepsilon'_1) = \frac{1}{4} D^{-1} \pi^{-3} \Delta^{-1/2} m_{00}^{1/2} m_{22}^{5/2} \times \exp\left[-\frac{\Delta_2 m_{00}}{2\Delta_{12}} (\varepsilon'_1)^2\right] \int_{-\infty}^0 \exp(A_1 t^2 + A_7 \varepsilon'_1 t) dt \times \int_0^{-t} (t^2 - \rho^2) \rho d\rho \int_0^{2\pi} \exp[A_4 \rho^2 \cos^2 \varphi + A_5 \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi + A_6 \rho^2 \sin^2 \varphi + (A_2 t + A_8 \varepsilon'_1) \rho \cos \varphi + (A_3 t + A_9 \varepsilon'_1) \rho \sin \varphi] d\varphi, \quad (9)$$

де

$$A_1 = -\frac{m_{22}(\Delta_6 + 2\Delta_8 + \Delta_{11})}{2\Delta_{12}}; A_2 = -\frac{m_{22}(\Delta_6 - \Delta_{11})}{\Delta_{12}};$$

$$A_3 = \frac{m_{22}(\Delta_7 + \Delta_{10})}{\Delta_{12}}; A_4 = -\frac{m_{22}(\Delta_6 - 2\Delta_8 + \Delta_{11})}{2\Delta_{12}};$$

$$A_5 = \frac{m_{22}(\Delta_7 - \Delta_{10})}{\Delta_{12}}; A_6 = -\frac{\Delta_9 m_{22}}{2\Delta_{12}};$$

$$A_7 = \frac{(\Delta_3 + \Delta_5)(m_{00} m_{22})^{1/2}}{\Delta_{12}};$$

$$A_8 = \frac{(\Delta_3 - \Delta_5)(m_{00} m_{22})^{1/2}}{\Delta_{12}}; A_9 = -\frac{\Delta_4 (m_{00} m_{22})^{1/2}}{\Delta_{12}};$$

$\Delta, \Delta_1, \dots, \Delta_{12}, D, t, \rho, \varphi$ [1, 5].

1.3.2. Ізотропна поверхня. Розглядаючи ізотропну шорстку поверхню як поодинокий випадок анізотропної шорсткої поверхні, коли АКФ і моменти СЩ не залежать від напрямку, на підставі (7), будемо мати співвідношення:

$$\begin{aligned} m_{00} &= m_0; \quad m_{20} = m_{02} = m_2; \\ m_{11} &= m_{13} = m_{31} = 0; \\ 3m_{22} &= m_{40} = m_{04} = m_4. \end{aligned} \quad (10)$$

Звідки за (9) щільність ймовірностей розподілу висот вершин ізотропної поверхні [1, 5, 16]:

$$\begin{aligned} p_{sum}(\varepsilon'_1) &= \frac{\sqrt{3}C_1}{2\pi} \left[\left(\frac{1}{C_1} - 2 \right) J_0 + \varepsilon'_1 \sqrt{\frac{3}{\alpha}} J_1 + 2J_2 \right] = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \left\{ \exp[-C_1(\varepsilon'_1)^2] \sqrt{\frac{3(2\alpha-3)}{\alpha^2}} \varepsilon'_1 + \right. \\ &+ \exp\left[-\frac{(\varepsilon'_1)^2}{2}\right] (1 + \operatorname{erf}\beta) \frac{3\sqrt{2\pi}}{2\alpha} [(\varepsilon'_1)^2 - 1] + \\ &+ \left. \sqrt{2\pi} \exp\left[-\frac{\alpha(\varepsilon'_1)^2}{2(\alpha-1)}\right] (1 + \operatorname{erf}\gamma) \sqrt{\frac{\alpha}{3(\alpha-1)}} \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

де $\beta = \varepsilon'_1 \sqrt{\frac{3}{2(2\alpha-3)}}$; $\gamma = \varepsilon'_1 \sqrt{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)(2\alpha-3)}}$;
 $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$ – інтеграл ймовірностей похибок [46];

$$\begin{cases} C_1 = \frac{\alpha}{2\alpha-3}; \quad C_2 = C_1 \sqrt{\frac{12}{\alpha}}; \\ \alpha = \frac{m_0 m_4}{m_2^2} - \text{параметер ширококосмугастости} \end{cases} \quad (12)$$

спектру шорсткої ізотропної випадкової поверхні; $1,5 \leq \alpha < \infty$. Фізичний смисл параметра α пов'язаний з характеристичною шириною СЩ-поверхні: широкий спектр містить значний діапазон довжин хвиль (характеристична ширина зростає: $\alpha \rightarrow \infty$), а вузький спектр – всі хвилі мають приблизно однакову довжину (характеристична ширина зменшується: $\alpha \rightarrow 1,5$).

На рис. 1 приведена залежність щільності ймовірностей розподілу висот вершин $p(\varepsilon'_1)$ шорсткої ізотропної поверхні в залежності від безрозмірної (нормованої) висоти ε'_1 та параметра ширококосмугастости спектру α , який змінюється в межах $1,5 \dots \infty$ [16].

За [16] для опису ізотропних шорстких поверхонь необхідно використати три спектральні моменти (m_0 , m_2 і m_4) і один параметер ширококосмугастости спектру $\alpha = \frac{(m_0 m_4)}{m_2^2}$, який не залежить від орієнтації системи координат на поверхні.

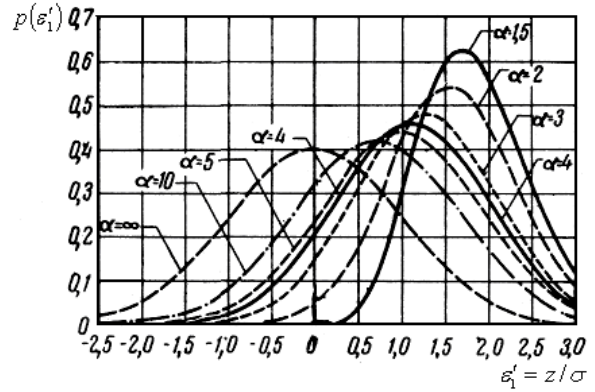


Рис. 1. Залежність щільності ймовірностей розподілу висот вершин ізотропної шорсткої поверхні, змодельованої випадковим полем, від безрозмірної (нормованої) висоти для параметра ширококосмугастости спектру СЩ-поверхні $\alpha=1,5; 2; 3; 4; 5; 10; \infty$ [16].

Згідно [16], параметер ширококосмугастости СЩ α для ізотропної випадкової поверхні знаходиться в межах $1,5 \leq \alpha < \infty$. Для граничних значень α щільність ймовірностей розподілу висот вершин ізотропної поверхні дорівнює [16]:

- при $\alpha \rightarrow 1,5$ ($\beta \rightarrow \infty; \gamma \rightarrow \infty; C_1 \rightarrow \infty$)

$$p(\varepsilon'_1) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\varepsilon'_1)^2}{2}\right] \times \\ \times \left\{ (\varepsilon'_1)^2 - 1 + \exp[-(\varepsilon'_1)^2] \right\}, & \varepsilon'_1 \geq 0 \\ 0, & \varepsilon'_1 < 0 \end{cases} \quad (13)$$

тобто розподіл (11) близький до релеєвського розподілу;

- при $\alpha \rightarrow \infty$ ($\beta \rightarrow 0; \gamma \rightarrow 0; C_1 \rightarrow 1/2$)

$$p(\varepsilon'_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\varepsilon'_1)^2}{2}\right], \quad (14)$$

тобто розподіл (11) підпорядкований гауссовському розподілу.

У загальному випадку щільність ймовірностей висот вершин залежить від двох параметрів: α і ε'_1 , а в граничних випадках – від одного параметра ε'_1 .

Як видно з рис. 1, для $\alpha \rightarrow \infty$ спостерігається гауссовський розподіл щільності ймовірностей висот вершин при $\varepsilon'_1 = -3,5 \dots +3,5$, при цьому $0 \leq p(\varepsilon'_1) \leq 0,4$, а при $\alpha=1,5$ маємо релеєвський розподіл в межах $0 \leq \varepsilon'_1 \leq +3,5$, при цьому $0 \leq p(\varepsilon'_1) \leq 0,627$.

Щільність ймовірностей висот $\varepsilon_1 = z$ поверхні [1, 5]:

$$p(\varepsilon_1) = \sqrt{(2\pi\sigma^2)} \exp\left(-\frac{\varepsilon_1^2}{2\sigma^2}\right). \quad (15)$$

Таким чином, розподіл висот поверхні підпорядкований гауссовському закону.

1.4. Функція розподілу висот вершин ізотропної шорсткої поверхні [16], яка визначає частку тих вершин, у яких величини висот не перевищують значення ε'_1 :

$$f(\varepsilon'_1) = \int_{-\infty}^{\varepsilon'_1} p(\varepsilon'_1) d\varepsilon'_1, \quad (16)$$

де $0 \leq f(\varepsilon'_1) \leq 1$ при $0 \leq \varepsilon'_1 < 3,5$ та $1,5 \leq \alpha < \infty$.

На рис. 2 приведена залежність функції розподілу висот вершин $f(\varepsilon'_1)$ шорсткої ізотропної поверхні [16] від нормованої висоти ε'_1 , яка змінюється від 0 до 3,0 для значень параметра широкосмугастості спектру $\alpha=1,5; 2; 3; 4; 5; 10; \infty$.

Як видно з рис. 2, при $\alpha \rightarrow 1,5$ відбувається зменшення відносного числа тих вершин, висоти яких не перевищують рівень $+3\sigma$ (при $\varepsilon'_1 < 3$) [16].

1.5. Середня кривина шорсткої поверхні у вершині виступів висотою ε'_1 .

1.5.1. Анізотропна поверхня [1, 6]:

$$\begin{aligned} EK_{sum}(\varepsilon'_1) = & -m_{22}^{1/2} \left\{ \frac{m_{00}^{1/2} m_{22}^{5/2}}{4D\pi^3 \Delta^{1/2}} \times \right. \\ & \times \exp \left[-\frac{\Delta_2 m_{00}}{2\Delta_{12}} (\varepsilon'_1)^2 \right] \int_{-\infty}^0 t \exp(A_1 t^2 + A_7 \varepsilon'_1 t) dt \times \\ & \times \int_0^{-t} (t^2 - \rho^2) \rho d\rho \int_0^{2\pi} \exp[A_4 \rho^2 \cos^2 \varphi + \\ & + A_5 \rho^2 \cos \varphi \cdot \sin \varphi + A_6 \rho^2 \sin^2 \varphi + \\ & + (A_2 t + A_8 \varepsilon'_1) \rho \cos \varphi + (A_3 t + A_9 \varepsilon'_1) \times \\ & \times \rho \sin \varphi] d\varphi \Big/ \left(\frac{1}{4} D^{-1} \pi^{-3} \Delta^{-1/2} m_{00}^{1/2} m_{22}^{5/2} \times \right. \\ & \times \exp \left[-\frac{\Delta_2 m_{00}}{2\Delta_{12}} (\varepsilon'_1)^2 \right] \int_{-\infty}^0 \exp(A_1 t^2 + A_7 \varepsilon'_1 t) dt \times \\ & \times \int_0^{-t} (t^2 - \rho^2) \rho d\rho \int_0^{2\pi} \exp[A_4 \rho^2 \cos^2 \varphi + \\ & + A_5 \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi + A_6 \rho^2 \sin^2 \varphi + (A_2 t + \\ & + A_8 \varepsilon'_1) \rho \cos \varphi + (A_3 t + A_9 \varepsilon'_1) \rho \sin \varphi] d\varphi \Big\}. \end{aligned} \quad (17)$$

1.5.2. Ізотропна поверхня [16]:

$$EK_{sum}(\varepsilon'_1) = \sqrt{\frac{m_4}{3}} \cdot \frac{J_3(\varepsilon'_1) - 2J_1(\varepsilon'_1) + 2J_5(\varepsilon'_1)}{J_2(\varepsilon'_1) - 2J_0(\varepsilon'_1) + 2J_4(\varepsilon'_1)},$$

де J_0, \dots, J_5 – функції параметрів ε'_1 і α [16]:

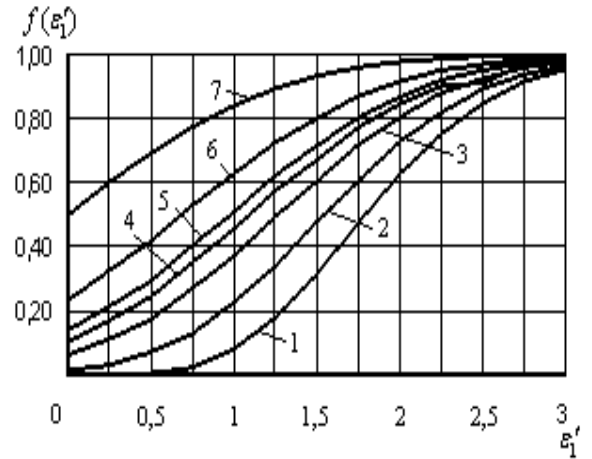


Рис. 2. Залежність функції розподілу $f(\varepsilon'_1)$ висот вершин ізотропної шорсткої поверхні, змодельованої випадковим полем, від безрозмірної (нормованої) висоти вершини ε'_1 для параметра широкосмугастості спектру СЩ-поверхні α : 1 – $\alpha=1,5$; 2 – $\alpha=2$; 3 – $\alpha=3$; 4 – $\alpha=4$; 5 – $\alpha=5$; 6 – $\alpha=10$; 7 – $\alpha \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} J_0 &= \sqrt{\frac{\pi}{2C_1}} \exp \left[-\frac{(\varepsilon'_1)^2}{2} \right] (1 + \operatorname{erf} \beta); \\ J_1 &= \frac{1}{C_1} \left\{ \exp[-C_1(\varepsilon'_1)^2] + \beta \sqrt{\pi} \exp \left[-\frac{(\varepsilon'_1)^2}{2} \right] (1 + \operatorname{erf} \beta) \right\}; \\ J_2 &= \sqrt{\frac{2}{C_1^3}} \left\{ \beta \exp[-C_1(\varepsilon'_1)^2] + \sqrt{\pi} \exp \left[-\frac{(\varepsilon'_1)^2}{2} \right] \times \right. \\ & \times (1 + \operatorname{erf} \beta) (\beta^2 + 1/2) \Big\}; \\ J_3 &= \frac{2}{C_1^2} \left\{ \exp[-C_1(\varepsilon'_1)^2] (1 + \beta^2) + \sqrt{\pi} \exp \left[-\frac{(\varepsilon'_1)^2}{2} \right] \times \right. \\ & \times (1 + \operatorname{erf} \beta) (\beta^3 + 3\beta/2) \Big\}; \\ J_4 &= \sqrt{\frac{\pi}{2(1+C_1)}} \exp \left[-\frac{\alpha(\varepsilon'_1)^2}{2(\alpha-1)} \right] (1 + \operatorname{erf} \gamma); \\ J_5 &= \frac{1}{C_1 + 1} \left\{ \exp[-C_1(\varepsilon'_1)^2] + \gamma \sqrt{\pi} (1 + \operatorname{erf} \gamma) \times \right. \\ & \times \exp \left[-\frac{\alpha(\varepsilon'_1)^2}{2(\alpha-1)} \right] \Big\}. \end{aligned}$$

Цей же результат за [1, 6]:

$$\begin{aligned} EK_{sum}(\varepsilon'_1) = & \sqrt{\frac{m_4}{3}} \times \\ & \times \left[\frac{\frac{\varepsilon'_1}{C_1} \sqrt{\frac{3}{\alpha}} J_0 + \left(\frac{2}{C_1} + \frac{3(\varepsilon'_1)^2}{\alpha} - 2 \right) J_1 + 2J_3}{\left(\frac{1}{C_1} - 2 \right) J_0 + \varepsilon'_1 \sqrt{\frac{3}{\alpha}} J_1 + 2J_2} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Граничні залежності для $\bar{K}_{sum}(\varepsilon'_1)$ [16]:

$$\bullet \text{ при } \alpha \rightarrow 1,5 \left. \begin{aligned} \bar{K}_{sum}(\varepsilon'_1) &= \varepsilon'_1 \sqrt{\frac{2}{3} m_4}, & \varepsilon'_1 \geq 0 \\ &0, & \varepsilon'_1 < 0 \end{aligned} \right\} (19)$$

$$\bullet \text{ при } \alpha \rightarrow \infty \quad \bar{K}_{sum}(\varepsilon'_1) = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{m_4}{\pi}}. \quad (20)$$

На рис. 3 приведена залежність сподівання значення безрозмірної (нормованої) середньої кривини ізотропної шорсткої поверхні у вершині $\bar{K}_m / \sqrt{m_4}$ від безрозмірної (нормованої) висоти ε'_1 та параметра широкосмугастости спектру α .

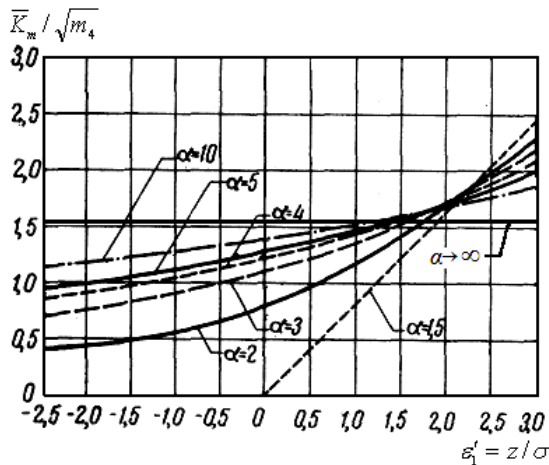


Рис. 3. Сподіване значення безрозмірної нормованої середньої кривини ізотропної шорсткої поверхні, змодельованої випадковим полем, у вершині нано- чи мікронерівностей від безрозмірної (нормованої) висоти для параметра широкосмугастости спектру СЦ-поверхні $\alpha=1,5; 2; 3; 4; 5; 10; \infty$ [16].

1.6. Градієнт випадкової шорсткої поверхні визначається за [1, 7, 13, 16].

1.6.1. Анізотропна поверхня:

$$Eq_{sum} = \sqrt[4]{\frac{4\Delta_1}{\pi^2}} \exp\left(\frac{\eta_1}{2}\right) E_1\left(\sqrt{1 - \exp(-2\eta_1)}\right), \quad (21)$$

де зворотній гіперболічний косинус [46]:

$$\eta_1 = \text{Arch} \frac{M_2}{2\sqrt{\Delta_1}},$$

де $\frac{M_2}{2\sqrt{\Delta_1}} \geq 1$;

$E_1(x)$ – повний еліптичний інтеграл Лежандра 2-го роду.

1.6.2. Для ізотропної поверхні [1] $\Delta_1 = m_2^2$; $M_2 = 2m_2$; $\eta_1 = 0$, тоді вираз (21) набуде вигляду [1, 7, 16]:

$$Eq_{sum} = \sqrt{\frac{\pi m_2}{2}}. \quad (22)$$

2. Опис профілограми випадкових процесів і полів шорсткої поверхні.

2.1. Автокореляційна функція (АКФ) профілограми. За [16], якщо профілограма поверхні вимірюється у довільному напрямку «зрізу» (перерізу) $\theta = \theta_i$, то висота $z(x, y)$ виступів профілограми залежить лише від відстані r точки профіля поверхні від начала координат (x, y) . Тоді, автокореляційна функція профілограми в площині $\theta = \theta_i$ за [16] визначається виразом:

$$R_{\theta_i}(r) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L z(r_1) z(r_1 + r) dr_1. \quad (23)$$

2.2. Спектральна щільність (СЩ) профілограми. СЩ профілограми вимірної шорсткоти поверхні так визначається за перетворенням Фур'є [16]:

$$\Phi_{\theta_i}(k') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\theta_i}(r) \exp(-ik'r) du, \quad (24)$$

де індекс « θ_i » відносить статистичну характеристику до профілограми.

2.3. Співвідношення між спектральними щільностями поверхні (Φ) та її профілограми (Φ_{θ_i}) визначається за [41]:

$$\Phi_{\theta_i}(k') = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(k_x, k_y) dl, \quad (25)$$

де $l = \sqrt{(k_x^2 + k_y^2 - (k')^2)}$. (26)

За [16] співвідношення (25) має таке тлумачення (рис. 4): точка P на площині хвильових чисел має координати $P(k'\sin\theta_0; k'\cos\theta_0)$, що відповідає хвилі з хвильовим числом k' у напрямку «зрізу» профілограми шорсткої поверхні, при цьому пряма лінія NPR , яка перпендикулярна OP , уявляє собою геометричне місце тих точок площини хвильових чисел, для яких проекція хвильового вектора на пряму

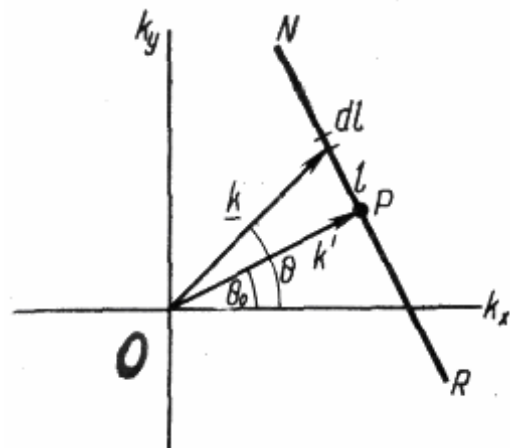


Рис. 4. Означення спектральної щільності (СЩ) профілограми, вимірної у довільному напрямку θ_i по СЩ-поверхні [16].

лінію ОР має довжину \mathbf{k}' [таким чином, будь-яка хвиля, для якої кінець хвильового вектора лежить на прямій NPR, має хвильове число \mathbf{k}' у напрямку ОР, тоді пряма лінія NPR уявляє собою шлях інтегрування у виразі (25)].

2.4. Моменти спектральної щільності профілограми шорсткої поверхні за [16] визначаються так:

$$m_{n\theta_i} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\theta_i}(k') (k')^n dk'. \quad (27)$$

Моменти СЩ анізотропної поверхні \mathbf{m}_{pq} та СЩ її профілограми пов'язані між собою такими залежностями [41] на основі виразів (7), (25), (27):

$$m_{n\theta_i} = m_{n0} \cos^n \theta_i + C_1^n m_{n-1,1} \cos^{n-1} \theta_i \sin \theta_i + C_2^n m_{n-2,2} \cos^{n-2} \theta_i \sin^2 \theta_i + \dots + m_{0n} \sin^n \theta_i, \quad (28)$$

$$\text{де } C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (29)$$

Для ізотропної поверхні на підставі (7) і (28) можна отримати співвідношення (10).

2.5. Вибіркова аналіза випадкових ізотропних поверхонь.

2.5.1. Якщо виміряна профілограма ізотропної випадкової поверхні у довільному напрямку, то за [16] її АКФ можна розрахувати за (23), а за (24) – розрахувати СЩ профілограми і за формулою (27) – розрахувати моменти \mathbf{m}_0 , \mathbf{m}_2 , \mathbf{m}_4 .

2.5.2. За Лонге-Гігінсом [41] ця процедура спрощена:

1) Розраховується щільність нулів $\mathbf{D}_{zero, \theta}$ (перетин профілограми зі середньою арифметичною лінією) та екстремумів (максимумів + мінімумів профілограми шорсткої випадкової поверхні) за формулами [41]:

$$D_{zero, \theta} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}}; \quad (30)$$

$$D_{extr, \theta} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{m_4}{m_2}}, \quad (31)$$

де індекс « θ » вказує, що статистична характеристика відноситься до профілограми, а не означає анізотропію (за профілограмою розраховують за МНК $\sigma = \sqrt{m_0}$).

2) Після цього визначають \mathbf{m}_2 за (30) та \mathbf{m}_4 за (31), підрахувавши кількість «нулів» та «екстремумів» на одиницю базової довжини профілограми [16, 41]:

$$m_2 = \pi^2 \sigma^2 (D_{zero, \theta})^2 = \pi^2 m_0 (D_{zero, \theta})^2; \quad (32)$$

$$m_4 = \pi^4 \sigma^2 (D_{zero, \theta})^2 (D_{extr, \theta})^2 = \pi^4 m_0 (D_{zero, \theta})^2 (D_{extr, \theta})^2. \quad (33)$$

2.5.3. Параметр широкосмугастости спектру α визначається за (12):

$$\alpha = \frac{m_0 m_4}{m_2^2} = \left(\frac{D_{extr, \theta}}{D_{zero, \theta}} \right)^2. \quad (34)$$

2.5.4. З-за симетрії щільність піків (максимумів) профілограми дорівнює половині відповідної щільності екстремумів [16]:

$$D_{peak, \theta} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_4}{m_2}}. \quad (35)$$

За (32), (33) отримаємо:

$$D_{peak, \theta} = \frac{1}{2} D_{extr, \theta}. \quad (36)$$

За формулою (49) для щільності вершин шорсткої випадкової поверхні маємо вираз [16]:

$$D_{sum} = \frac{1}{6\pi\sqrt{3}} \left(\frac{m_4}{m_2} \right), \quad (37)$$

тоді, порівнюючи (35) з (37), отримаємо співвідношення між щільностями вершин поверхні \mathbf{D}_{sum} та її профілограми \mathbf{D}_{peak} :

$$D_{sum} = \frac{2\pi \cdot D_{peak}^2}{3\sqrt{3}} \approx 1,2092 D_{peak}^2 = \frac{\pi \cdot D_{extr}^2}{6\sqrt{3}} \approx 0,3023 \cdot D_{extr}^2.$$

Сучасні прилади дозволяють отримувати вихідний сигнал \mathbf{m}_0 , \mathbf{m}_2 , \mathbf{m}_4 .

2.5.5. Певними недоліками методу Лонге-Гігінса [41] по визначенню $\mathbf{D}_{zero, \theta}$; $\mathbf{D}_{extr, \theta}$; \mathbf{m}_2 , \mathbf{m}_4 ; α ; \mathbf{D}_{peak} ; \mathbf{D}_{sum} полягає у тому, що сигнал, який подолав фільтр високих частот, за профілограмою містить низькочастотні компоненти (тобто, які містять малі хвильові числа) – піки (максимуми), западини (мінімуми), перетини нульового рівня, а високочастотні компоненти (тобто, які містять великі хвильові числа) Φ_0 будуть відфільтровані і, навпаки, сигнал, який подолав фільтр низьких частот за профілограмою містить лише великі піки, западини і перетини нульового рівня [16].

2.5.6. Щільність ймовірностей розподілу висот піків профілограми (максимумів) ізотропної випадкової поверхні отримано в [47] за [48]:

$$p_{peak}(\varepsilon'_1) = \sqrt{\frac{\alpha-1}{2\pi\alpha}} \left\{ \exp\left[-\frac{\alpha(\varepsilon'_1)^2}{2(\alpha-1)}\right] + \varepsilon'_1 \sqrt{\frac{\pi}{2(\alpha-1)}} \exp\left[-\frac{(\varepsilon'_1)^2}{2}\right] \times \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\varepsilon'_1}{\sqrt{2(\alpha-1)}}\right) \right] \right\}, \quad (38)$$

де $\alpha = \frac{m_0 m_4}{m_2^2}$; $1 \leq \alpha < \infty$.

Фізичний смисл параметра α для профілограми відповідає α для ізотропної випадкової поверхні: малі значення α відповідають вузькосмугастому спектру, а великі значення α – широкосмугастому спектру [16]. Але для випадкового процесу, що представляє профілограму ізотропної випадкової шорсткої поверхні, можливі лише значення $\alpha > 1,5$ [16].

Для граничних значень α вираз для p_{peak} має такий вигляд [16]:

$$\bullet \alpha=1,0 \quad p_{peak}(\varepsilon'_1) = \begin{cases} \varepsilon'_1 \exp\left[-\frac{(\varepsilon'_1)^2}{2}\right], & \varepsilon'_1 \geq 0 \\ 0, & \varepsilon'_1 < 0 \end{cases} \quad (39)$$

$$\bullet \alpha \rightarrow \infty \quad p_{peak}(\varepsilon'_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\varepsilon'_1)^2}{2}\right] \quad (40)$$

[це відповідає (15) для $p_{sum}(\varepsilon'_1)$].

На рис. 5 показані графіки функції $p_{peak} = f(\varepsilon'_1)$ – щільності ймовірностей висот піків профілограми від нормованої величини ε'_1 , яка змінюється від $-2,5$ до $+3,0$, для значень параметра широкосмугастости спектру $\alpha=1; 1,5; 2; 3; 10; \infty$ [16].

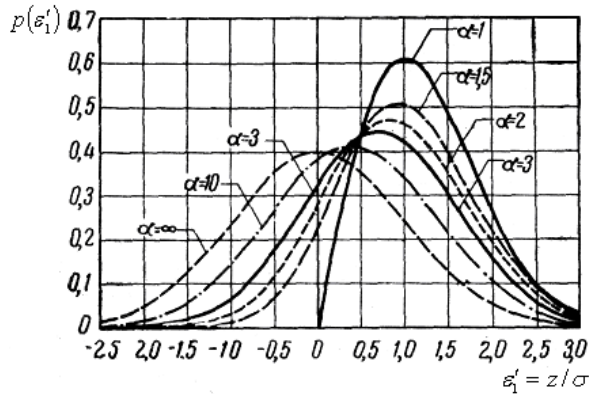


Рис. 5. Залежність щільностей ймовірностей розподілу висот піків профілограми шорсткої ізотропної поверхні від безрозмірної (нормованої) висоти для параметра широкосмугастости спектру профілограми $\alpha=1; 1,5; 2; 3; 10; \infty$ [16].

2.5.7. Функція розподілу висот піків профілограми ізотропної поверхні за [16] має вигляд:

$$f_{peak}(\varepsilon'_1) = \int_{-\infty}^{\varepsilon'_1} p_{peak}(\varepsilon'_1) d\varepsilon'_1, \quad (41)$$

де $0 \leq f(\varepsilon'_1) \leq 0,6$ при $-3,5 \leq \varepsilon'_1 \leq +3,5$ та $1 \leq \alpha < \infty$.

На рис. 6 показані залежності функції розподілу висот піків профілограми $f_{peak}(\varepsilon'_1)$ шорсткої ізотропної поверхні від нормованої висоти ε'_1 , яка змінюється від 0 до 3,0 для значень параметра широкосмугастости спектру $\alpha=1,0; 1,5; 2; 3; 4; 5; 10; \infty$.

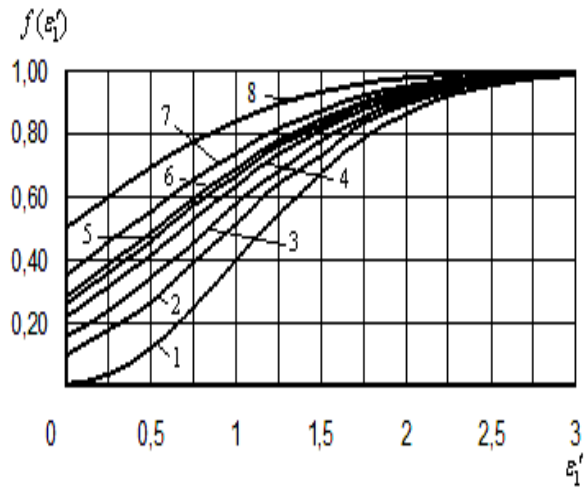


Рис. 6. Залежність функції розподілу висот піків профілограми шорсткої ізотропної поверхні від безрозмірної (нормованої) висоти для параметра широкосмугастости спектру профілограми $\alpha: 1 - \alpha=1,0; 2 - \alpha=1,5; 3 - \alpha=2; 4 - \alpha=3; 5 - \alpha=4; 6 - \alpha=5; 7 - \alpha=10; 8 - \alpha \rightarrow \infty$.

2.5.8. Кривина піків профілограми ізотропної поверхні.

Вираз для сподіваного значення середньої кривини піків профілограми ізотропної поверхні, отриманий аналогічно $E\bar{K}_{sum}(\varepsilon'_1)$ (18), за [1, 6, 16] має вигляд:

$$E\bar{K}_{peak}(\varepsilon'_1) = \sqrt{m_4} \sqrt{\frac{2(\alpha-1)}{\alpha}} \times \left\{ \left[\frac{\varepsilon'_1}{\sqrt{2(\alpha-1)}} + \sqrt{\pi} \exp\left[\frac{(\varepsilon'_1)^2}{2(\alpha-1)}\right] \right] \times \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\varepsilon'_1}{\sqrt{2(\alpha-1)}}\right) \right] \left[\frac{(\varepsilon'_1)^2 + (\alpha-1)}{2(\alpha-1)} \right] \right\} / \left\{ \left[\left(1 + \frac{\varepsilon'_1 \sqrt{\pi}}{\sqrt{2(\alpha-1)}} \right) \exp\left[\frac{(\varepsilon'_1)^2}{2(\alpha-1)}\right] \right] \times \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\varepsilon'_1}{\sqrt{2(\alpha-1)}}\right) \right] \right\}. \quad (42)$$

На рис. 7 показані залежності безрозмірних (нормованих) середніх кривин піків профілограми ізотропної поверхні $E\bar{K}_{peak}(\varepsilon'_1)$ від безрозмірної (нормованої) висоти ε'_1 , яка змінюється від $-2,5$ до $+3,0$ для значень параметра широкосмугастости спектру $\alpha=1; 1,5; 2; 3; 4; 5; 10; \infty$ [16].

2.6. Порівняння властивостей ізотропної шорсткої поверхні та її профілограми.

Найяк [16] розглянув методику знаходження моментів спектральної щільності ізотропної поверхні за однією профілограмою, яка виміряна

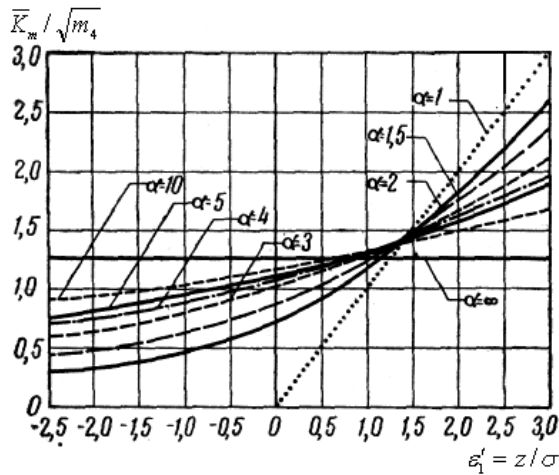


Рис. 7. Сподіване значення безрозмірної нормованої середньої кривини піків профілограми шорсткої ізотропної поверхні у вершині від безрозмірної (нормованої) висоти для параметра широкосмугастости спектру профілограми $\alpha=1; 1,5; 2; 3; 4; 5; 10; \infty$ [16].

у довільному напрямку, а також показав відмінності щільності ймовірностей висот вершин поверхні і піків профілограми від очікуваних значень, кривин вершин поверхні та кривин піків профілограми.

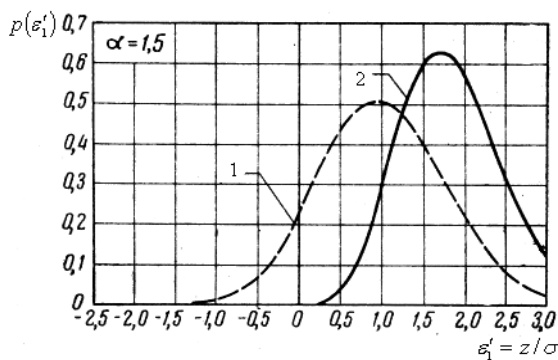
Крім того, у [16] показана відмінність характеристик шорсткості ізотропної поверхні від характеристик її профілограми.

Порівняння щільності ймовірностей розподілу висот піків профілограми (1) та вершин шорсткої ізотропної поверхні (2) для $\alpha=1,5$ (а), $\alpha=5$ (б), $\alpha=10$ (в), $\alpha \rightarrow \infty$ (г) приведені на рис. 8. Порівняння сподіваних значень кривин піків профілограми (1) та вершин шорсткої ізотропної поверхні (2) для $\alpha=1,5$ (а), $\alpha=5$ (б), $\alpha=10$ (в), $\alpha \rightarrow \infty$ (г) приведені на рис. 9.

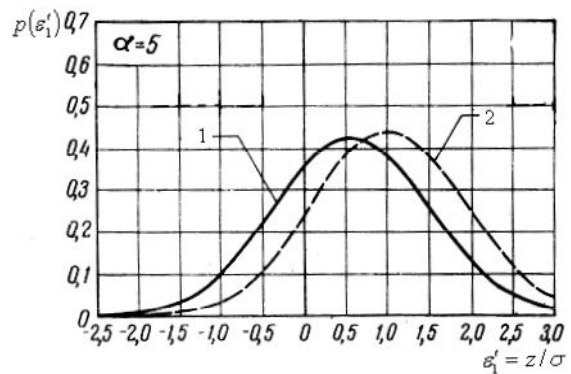
Порівняння сподіваних значень функцій розподілу висот піків профілограми (1) та вершин шорсткої ізотропної поверхні (2) для $\alpha=1,5$ (а); $\alpha=5$ (б); $\alpha=10$ (в); $\alpha \rightarrow \infty$ (г) приведені на рис. 10.

Як видно з рис. 8, 9, 10, є значна статистична різниця між даними профілограми та поверхні, яка зростає по мірі зміни параметра широкосмугастости α від ∞ до 1,5. Встановлена відмінність статистичних характеристик поверхні та профілограми ймовірно суттєва і для анізотропної поверхні та буде зростати при переході від ізотропної до анізотропної моделі.

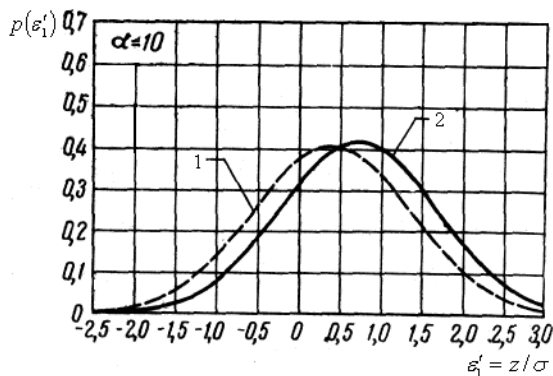
Як буде показано далі, наприклад, параметр широкосмугастости спектру α для поверхонь тертя металу і карбопластика дорівнював в основному 2,5–6,0 і не перевищував 15–20, а максимальне викривлення поверхні профілограмою спостерігається при $\alpha=1,5$ (при $\alpha \rightarrow \infty$ це викривлення відсутнє). Таким чином, вивчення навіть ізотропних шорстких поверхонь за допомогою лише параметрів її профілограми несе за собою значні неправдиві результати.



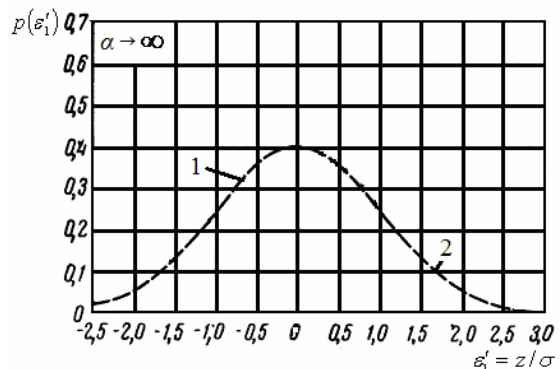
а



б



в



г

Рис. 8. Порівняння залежностей щільності ймовірностей розподілу висот піків профілограми (1) та висот вершин шорсткої ізотропної поверхні (2) для $\alpha=1,5$ (а); $\alpha=5$ (б); $\alpha=10$ (в); $\alpha \rightarrow \infty$ (г) [16].

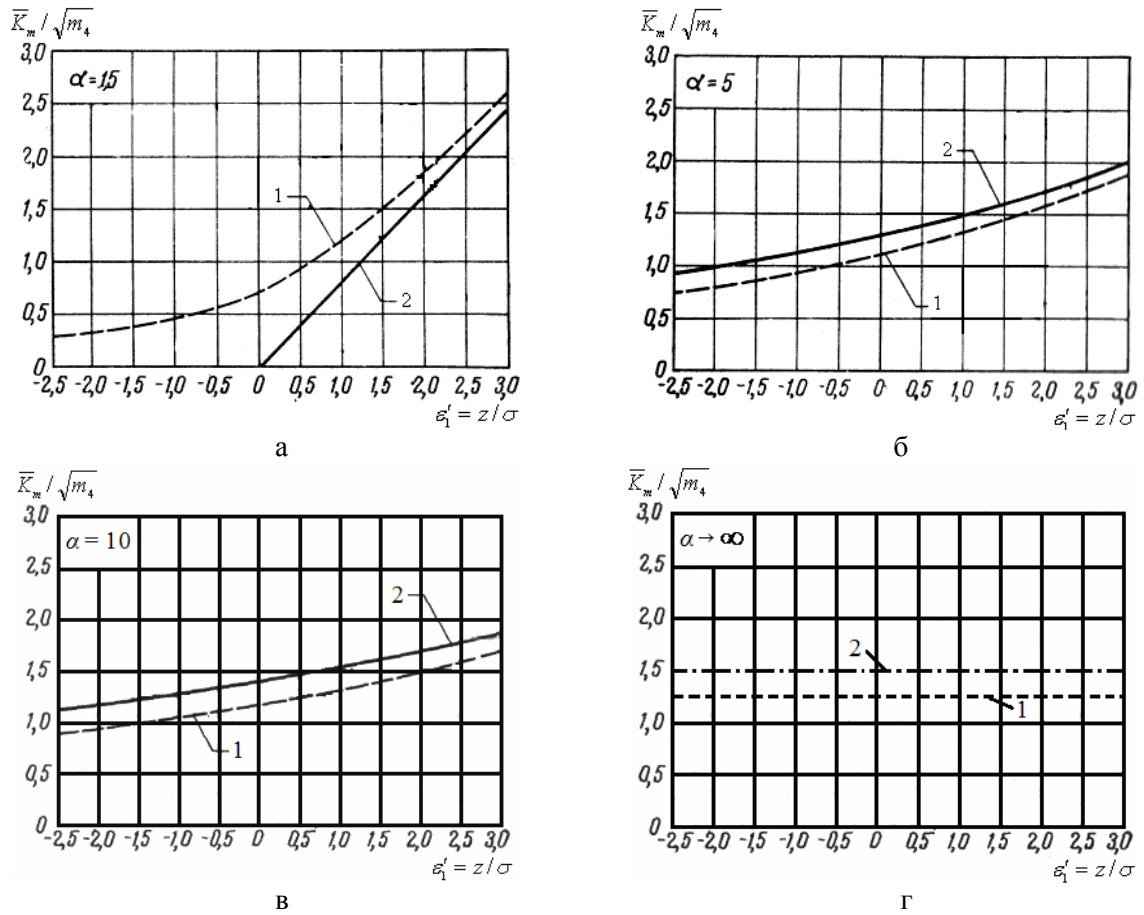


Рис. 9. Порівняння сподіваних значень кривин піків профілограми (1) та вершин ізотропної шорсткої поверхні (2) для $\alpha=1,5$ (а); $\alpha=5$ (б); $\alpha=10$ (в); $\alpha \rightarrow \infty$ (г) [16].

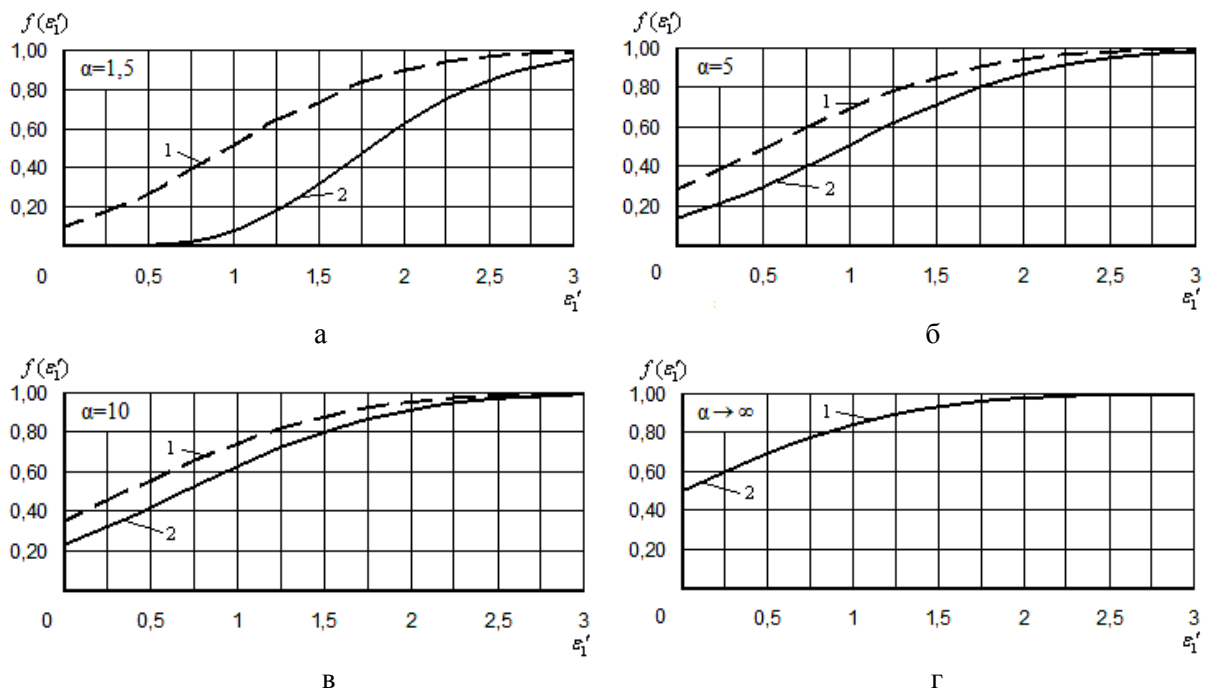


Рис. 10. Порівняння сподіваних значень функцій розподілу висот піків профілограми (1) та вершин ізотропних шорстких поверхонь (2), змодельованих випадковим полем, від безрозмірної (нормованої) висоти для значень параметра широкосмугастості спектру $\alpha=1,5$ (а); $\alpha=5$ (б); $\alpha=10$ (в); $\alpha \rightarrow \infty$ (г).

З рис. 8 видно, що профілограма спотворює поверхню: вона вказує на значно менше число високих піків і значно більше число низьких піків порівняно з тими вершинами (піками), які правдиво має поверхня (викривлення максимальне для $\alpha=1,5$, а при $\alpha \rightarrow \infty$ – відсутнє) [16]. Причина спотворення полягає у тому, що сигнал профілометра з набагато більшою ймовірністю проходить по схилу вершини, ніж по самій вершині, внаслідок чого на профілограмі з'являється пік меншої висоти, ніж це має місце на відповідній вершині поверхні [16].

Як видно з рис. 9, на профілограмі спостерігається викривлення властивостей кривини ізотропної шорсткої поверхні, але при $\alpha > 2,5$ це викривлення мале, а при $\alpha \leq 2,5$ сподівана кривина піків профілограми виявляється більшою, а при $\alpha > 2,5$ меншою, ніж у вершинах поверхні.

Як видно з рис. 10, число вершин поверхні з висотою більше $+3\sigma = +3\sqrt{m_0}$ значно перевищує те число, що виміряне профілограмою, якщо вилучити випадок $\alpha \rightarrow \infty$ [16].

2.7. Кутовий коефіцієнт профілограми ізотропної шорсткої поверхні.

1. Нехай профілограма виміряна у напрямках x та y . Сумісна щільність ймовірностей змінних ε_1 та ε_2 , ε_1 та ε_3 за [16] дорівнює:

• за напрямком x

$$p(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = p(\varepsilon_1)p(\varepsilon_2); \quad (43)$$

• за напрямком y

$$p(\varepsilon_1, \varepsilon_3) = p(\varepsilon_1)p(\varepsilon_3), \quad (44)$$

де $\varepsilon_1 = z$; $\varepsilon_2 = \frac{\partial z}{\partial x}$; $E(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2) = 0$; $\varepsilon_3 = \frac{\partial z}{\partial y}$;

$$E(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_3) = 0.$$

З (43), (44) витікає, що кутові коефіцієнти поверхні в певному напрямку і висоти поверхні у відповідних точках статистично незалежні [16].

2. За методом [1, 6, 16] знаходимо:

• за напрямком x

$$p(\varepsilon_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m_2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_2^2}{2m_2}\right); \quad (45)$$

• за напрямком y

$$p(\varepsilon_3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m_2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_3^2}{2m_2}\right). \quad (46)$$

З виразів (45), (46) знайдено [16] сподіване значення модуля кутового коефіцієнта $E|\varepsilon_2|$ та $E|\varepsilon_3|$ профілограми при довільній висоті [16]:

• за напрямком x

$$E|\varepsilon_2| = \sqrt{\frac{2}{\pi m_2}} \int_0^\infty \varepsilon_2 \exp\left(-\frac{\varepsilon_2^2}{2m_2}\right) d\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{2m_2}{\pi}}; \quad (47)$$

• за напрямком y

$$E|\varepsilon_3| = \sqrt{\frac{2}{\pi m_2}} \int_0^\infty \varepsilon_3 \exp\left(-\frac{\varepsilon_3^2}{2m_2}\right) d\varepsilon_3 = \sqrt{\frac{2m_2}{\pi}}. \quad (48)$$

Порівнюючи сподіване значення середнього градієнта ізотропної поверхні [16]:

$$E\zeta_{sum} = \int_0^\infty \zeta p(\zeta) d\zeta = \sqrt{\frac{\pi m_2}{2}} \quad (49)$$

(нормоване значення $\zeta_{sum}/\sqrt{m_2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1,2533 =$

const) з виразами для кутового коефіцієнта профілограми ізотропної поверхні (47), (48) знаходимо, що сподіване значення середнього кутового коефіцієнта профілограми [16]:

$$E\zeta_{peak} = \frac{\pi}{2} E|\varepsilon_2| = \frac{\pi}{2} |\varepsilon_3| \quad (50)$$

завжди менше середнього значення градієнта ізотропної поверхні:

$$|E\zeta_{peak}| < |E\zeta_{sum}|. \quad (51)$$

II. Методологічна частина

2.1. Для аналізу анізотропної поверхні необхідно визначити дев'ять моментів СЦ [16]:

нульового порядку – \mathbf{m}_{00} ;

другого порядку – $\mathbf{m}_{20}, \mathbf{m}_{02}, \mathbf{m}_{11}$;

четвертого порядку – $\mathbf{m}_{13}, \mathbf{m}_{22}, \mathbf{m}_{31}, \mathbf{m}_{04}, \mathbf{m}_{40}$.

З цією метою на поверхні тертя довільно вибирали нульовий напрямок, який не співпадав з напрямком слідів технологічної обробки, напрямком ковзання та інших напрямків технологічних чи природних впливів, і знімали профілограми в непаралельних перерізах $\theta_i = \theta_j, i \neq j$. Тоді можна записати для 3-х моментів СЦ профілограми \mathbf{n} співвідношень (28):

• для моменту нульового порядку – \mathbf{n} співвідношень виду: $m_{0\theta_i} = m_{00}$, де $i = 1, \dots, n$; (52)

• для моментів другого порядку – \mathbf{n} співвідношень виду:

$$m_{2\theta_i} = m_{20} \cos^2 \theta_i + 2m_{11} \cos \theta_i \sin \theta_i + m_{02} \sin^2 \theta_i, \quad (53)$$

де $i = 1, \dots, n$, причому будь-які три із \mathbf{n} рівнянь (53) лінійно незалежні;

• для моментів четвертого порядку – \mathbf{n} співвідношень виду:

$$m_{4\theta_i} = m_{40} \cos^4 \theta_i + 4m_{31} \cos^3 \theta_i \times \sin \theta_i + 6m_{22} \cos^2 \theta_i \sin^2 \theta_i + 4m_{13} \times \cos \theta_i \sin^3 \theta_i + m_{04} \sin^4 \theta_i, \quad (54)$$

де $i = 1, \dots, n$, причому будь-які п'ять із \mathbf{n} рівнянь (54) лінійно незалежні.

Таким чином, для визначення характеристик анізотропної поверхні необхідно зняти п'ять профілограм, виміряних в непаралельних напрямках, наприклад, $\theta_i=0^0; 30^0; 45^0; 60^0; 90^0$. Для кожного напрямку визначаємо три моменти $m_{0\theta_i}, m_{2\theta_i}, m_{4\theta_i}$ і, застосовуючи метод найменших квадратів (МНК) для обробки інформації, отримуємо формули:

$$m_{00} = \frac{1}{5}(m_{0,0^0} + m_{0,30^0} + m_{0,45^0} + m_{0,60^0} + m_{0,90^0}); \quad (55)$$

$$m_{20} = \frac{1}{10} \left[6m_{2,0^0} + \left(7 + \frac{5}{\sqrt{3}}\right) m_{2,30^0} - (1 + 2\sqrt{3}) \times \right. \\ \left. \times m_{2,45^0} - (3 + \sqrt{3}) m_{2,60^0} + \left(1 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right) m_{2,90^0} \right]; \quad (56)$$

$$m_{11} = \frac{1}{10} \left[-\left(\frac{3}{2} + 2\sqrt{3}\right) m_{2,0^0} - (2 - \sqrt{3}) m_{2,30^0} + \right. \\ \left. + (7 + 2\sqrt{3}) m_{2,45^0} - (2 - \sqrt{3}) m_{2,60^0} - \right. \\ \left. - \left(\frac{3}{2} + 2\sqrt{3}\right) m_{2,90^0} \right]; \quad (57)$$

$$m_{02} = \frac{1}{10} \left[\left(1 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right) m_{2,0^0} - (3 + \sqrt{3}) m_{2,30^0} - \right. \\ \left. - (1 + 2\sqrt{3}) m_{2,45^0} + \left(7 + \frac{5}{\sqrt{3}}\right) m_{2,60^0} + 6m_{2,90^0} \right]; \quad (58)$$

$$m_{40} = m_{4,0^0}; \quad (59)$$

$$m_{31} = -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) m_{4,0^0} + (1 + \sqrt{3}) m_{4,30^0} - \\ - \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right) m_{4,45^0} + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) m_{4,60^0} - \frac{1}{4} m_{4,90^0}; \quad (60)$$

$$m_{22} = \frac{4\sqrt{3} + 3}{18} m_{4,0^0} - \frac{8\sqrt{3} + 12}{9} m_{4,30^0} + \\ + \frac{8 + 4\sqrt{3}}{3} m_{4,45^0} - \frac{8\sqrt{3} + 12}{9} m_{4,60^0} + \\ + \frac{4\sqrt{3} + 3}{18} m_{4,90^0}; \quad (61)$$

$$m_{13} = -\frac{1}{4} m_{4,0^0} + (1 + \sqrt{3}) m_{4,30^0} - \\ - \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right) m_{4,45^0} + (1 + \sqrt{3}) m_{4,60^0} - \\ - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) m_{4,90^0}; \quad (62)$$

$$m_{04} = m_{4,90^0}. \quad (63)$$

2.2. Для ізотропної поверхні знаходили моменти нульового \mathbf{m}_0 , другого \mathbf{m}_2 і четвертого \mathbf{m}_4 порядків за методом [16, 41], визначивши щільність нулів \mathbf{D}_0 і екстремумів (мінімумів і максимумів) \mathbf{D}_{extr} за профілограмою, виміряної в одному напрямку, яке не співпадає з напрямком ковзання та направленням обробки поверхні:

$$m_0 = m_{00}; \quad (64)$$

$$m_2 = m_0 (\pi D_{0,\theta})^2; \quad (65)$$

$$m_4 = m_0 (\pi^2 D_{0,\theta} D_{extr,\theta})^2. \quad (66)$$

Так як $\mathbf{m}_0 = \sigma^2$, то безпосереднім вимірюванням середньоарифметичного відхилення профілю поверхні R_a , визначаємо середньогогеометричне відхилення профілю поверхні:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = R_q = R_a \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (67)$$

2.3. Використовуючи метод [16, 41] визначаємо моменти СЩ профілограми:

$$m_{00} = \sigma^2 = \frac{1}{n} \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^n R_{a\theta_i}^2; \quad (68)$$

$$m_{2\theta_i} = m_{00} (\pi D_{0,\theta_i})^2; \quad (69)$$

$$m_{4\theta_i} = m_{00} (\pi^2 D_{0,\theta_i} D_{extr,\theta_i})^2, \quad (70)$$

що дозволяє розрахувати моменти СЩ поверхні.

2.4. Частина експериментальних даних анізотропних поверхонь отримана вимірюванням параметрів R_a, D_0, D_{extr} у дванадцяти непаралельних перерізах, які задані співвідношеннями $\theta_i = 15^0 (i-1), i=1, \dots, 12$. У цьому випадку \mathbf{m}_{00} визначали за (68). Величини моментів другого порядку СЩ профілограми за напрямками, які розраховували за (69), використовували для розрахунків спектральних моментів другого порядку:

$$m_{2-j,j} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi m_2(\theta) C_{2-j,j}(\theta) d\theta, \quad j = 0, 1, 2. \quad (71)$$

Після розрахунків скоригованих значень моментів другого порядку за напрямками (53), використовуючи (70), знаходили моменти четвертого порядку:

$$m_{4\theta_i} = m_{2\theta_i} (\pi D_{extr,\theta_i})^2, \quad i = 1, \dots, 12, \quad (72)$$

і далі знаходили спектральні моменти четвертого порядку:

$$m_{4-j,j} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi m_4(\theta) C_{4-j,j}(\theta) d\theta, \quad j = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (73)$$

2.5. Для статистичної характеристики анізотропної поверхні використовували дев'ять моментів m_{pq} спектральної щільності, але ці моменти СЩ залежать від орієнтації системи координат.

2.6. При $p+q \leq 4$ існує сім інваріантних комбінацій цих моментів [16]. Для характеристики анізотропної поверхні будемо використовувати наступні сім інваріантних комбінацій моментів

СЩ, які не залежать від орієнтації системи координат:

інваріанти нульового порядку:

$$M_0 = m_{00}; \quad (74)$$

інваріанти другого порядку:

$$M_2 = m_{02} + m_{20}; \quad (75)$$

$$M_3 = m_{20}m_{02} - m_{11}^2 = \Delta_1; \quad (76)$$

інваріанти четвертого порядку:

$$M_4 = m_{40} + 2m_{22} + m_{04}; \quad (77)$$

$$M_5 = m_{40}m_{04} - 4m_{13}m_{31} + 3m_{22}^2; \quad (78)$$

$$M_6 = (m_{40} + m_{22})(m_{22} + m_{04}) - (m_{31} + m_{13})^2; \quad (79)$$

$$M_7 = m_{40}(m_{22}m_{04} - m_{13}^2) - m_{31}(m_{31}m_{04} - m_{13}m_{22}) + m_{22}(m_{31}m_{13} - m_{22}^2) = \Delta_2. \quad (80)$$

2.7. Введемо у науковий обіг параметри широкосмугастості спектру анізотропної поверхні:

$$\alpha_1 = \frac{M_0 M_4}{M_2^2} = \frac{m_{00}(m_{40} + 2m_{22} + m_{04})}{(m_{02} + m_{20})^2}; \quad (81)$$

$$\alpha_2 = \frac{M_0 M_5}{M_2^2} = \frac{m_{00}(m_{40}m_{04} - 4m_{13}m_{31} + 3m_{22}^2)}{(m_{02} + m_{20})^2}; \quad (82)$$

$$\alpha_3 = \frac{M_0 M_6}{M_2^2} = \frac{m_{00}[(m_{40} + m_{22})(m_{22} + m_{04}) - (m_{31} + m_{13})^2]}{(m_{02} + m_{20})^2}; \quad (83)$$

$$\alpha_4 = \frac{M_0 M_7}{M_2^2} = \frac{m_{00}[m_{40}(m_{22}m_{04} - m_{13}^2) - m_{31}(m_{31}m_{04} - m_{13}m_{22}) + m_{22}(m_{31}m_{13} - m_{22}^2)]}{(m_{02} + m_{20})^2}; \quad (84)$$

$$\alpha_5 = \frac{M_0 M_4}{M_3^2} = \frac{m_{00}(m_{40} + 2m_{22} + m_{04})}{(m_{20}m_{02} - m_{11}^2)^2}; \quad (85)$$

$$\alpha_6 = \frac{M_0 M_5}{M_3^2} = \frac{m_{00}(m_{40}m_{04} - 4m_{13}m_{31} + 3m_{22}^2)}{(m_{20}m_{02} - m_{11}^2)^2}; \quad (86)$$

$$\alpha_7 = \frac{M_0 M_6}{M_3^2} = \frac{m_{00}[(m_{40} + m_{22})(m_{22} + m_{04}) - (m_{31} + m_{13})^2]}{(m_{20}m_{02} - m_{11}^2)^2}; \quad (87)$$

$$\alpha_8 = \frac{M_0 M_7}{M_3^2} = \frac{m_{00}[m_{40}(m_{22}m_{04} - m_{13}^2) - m_{31}(m_{31}m_{04} - m_{13}m_{22}) + m_{22}(m_{31}m_{13} - m_{22}^2)]}{(m_{20}m_{02} - m_{11}^2)^2}. \quad (88)$$

2.8. Для статистичної характеристики ізотропної поверхні використовували три моменти СЩ (інваріанти):

нульового порядку $m_0 = m_{00} = M_0$;

другого порядку $m_2 = m_{20} = m_{02} = m_{11} = M_2$;

четвертого порядку $m_4 = m_{40} = m_{22} = m_{31} = m_{04} = m_{40} = M_4$.

Для ізотропної поверхні параметер α , який характеризує широкосмугастість спектру [16]:

$$\alpha = \frac{m_0 m_4}{m_2^2}, \quad \alpha = 1, 5, \dots, \infty. \quad (89)$$

Середньоквадратичне значення ширини спектру характеризує параметер [16]:

$$\Lambda = 1 - \frac{1}{\alpha} = \frac{m_0 m_4 - m_2^2}{m_0 m_4}, \quad \Lambda = 0,333(3); \dots; 1,0. \quad (90)$$

2.9. Вимірювання шорсткості криволінійних поверхонь. Відомо [54], що для оцінки шорсткості циліндричних та інших криволінійних поверхонь, а також внутрішніх циліндричних та торцевих поверхонь наскрізних та глухих отворів у діапазоні $R_a=0,08-10,0$ мкм, використовується малогабаритний прилад – індикатор шорсткості поверхні непрямої дії, який працює в режимі компаратора [54].

Для поверхонь циліндрів, штоків і ущільнювальних кілець можливе зняття профілограм тільки перпендикулярно слідам обробки в напрямку ковзання. У цьому випадку для анізотропної поверхні використовувалися співвідношення для ізотропної поверхні шляхом введення еквівалентних моментів:

$$m_{0e} = \sqrt{m_{0x} m_{0y}}; \quad (91)$$

$$m_{2e} = \sqrt{m_{2x} m_{2y}}; \quad (92)$$

$$m_{4e} = \sqrt{m_{4x} m_{4y}}; \quad (93)$$

де x, y відносяться до напрямків вздовж (x) і поперек (y) слідів обробки.

При цьому приймали, що поверхня має яскраво виражений напрямок слідів обробки. Тоді ширину просторового спектру мікронерівностей або нанонерівностей у напрямках x і y будуть характеризувати параметри широкосмугаєстості СЩ:

$$\alpha_1 = \frac{m_{00} m_{40}}{m_{20}^2}; \quad (94)$$

$$\alpha_2 = \frac{m_{00} m_{04}}{m_{02}^2}. \quad (95)$$

За еквівалентними параметрами визначали еквівалентні значення параметру широкосмугаєстості СЩ:

$$\alpha_e = \frac{m_{0e} m_{4e}}{m_{2e}^2}. \quad (96)$$

Внаслідок симетрії і припущення про концентричні еліпси, будемо мати $m_{11}=m_{13}=m_{31}=m_{21}\approx 0$; $m_{04}\gg m_{40}$; $m_{02}\gg m_{20}$, тоді $m_{0e}\approx m_{2y}$; $m_{2e}\approx m_{2y}$; $m_{4e}\approx m_{4y}$, а еквівалентне значення параметра широкосмугаєстості СЩ:

$$\alpha_e \approx \frac{m_{0y} m_{4y}}{m_{2y}^2}. \quad (97)$$

Таким чином, еквівалентне значення α_e для анізотропних поверхонь впливає із аналізу однієї профілограми, вимірної поперек слідів обробки. При цьому, статистичні характеристики поверхні,

які залежать від α_e вважаємо ізотропними характеристиками, еквівалентними характеристикам профілограми у напрямку нормалі до слідів обробки.

2.10. Методи дослідження мікросорсткості поверхні. Полімерні зразки діаметром 10 мм і висотою 15 мм або із стороною квадрата 10 мм і висотою 15 мм після токарної обробки або фрезерування, послідовно припрацьовували на шліфувальній шкурці та металевому контртілі. Металеве контртіло шліфували, а потім обробляли на шліфувальній шкурці в одному напрямку (для того, щоб отримати анізотропну поверхню) і у випадкових напрямках (для того, щоб отримати поверхню, яка була б близькою до ізотропної поверхні). Після припрацювання полімерних зразків металеве контртіло знову припрацьовували на шліфувальній шкурці.

Профілограми мікросорсткості знімали за допомогою профілометра-профілографа моделі ВЭИ «Калибр» і моделі «252». Для одного напрямку знімали 50-60 базових довжин профілограм для металевого контртіла і 10-15 базових довжин профілограм для полімерного зразка. Для ізотропної поверхні профілограму знімали під кутом $\sim 45^\circ$ до напрямку ковзання. Ділянки зйомки поверхні були рівнорозподілені за слідом тертя. Статистичні характеристики різних ділянок поверхні були однаковими в статистичному розумінні.

Профілограми оброблялися за методом МНК: знаходили середньоарифметичне відхилення профіля поверхні R_a , щільність нулів D_0 і щільність екстремумів D_{extr} . Вимірня R_a і розрахункова за профілограмами D_0 (для моделі «252») D_0 вимірня) були статистично рівні.

Великий об'єм виборки і рівномірний розподіл її по поверхні забезпечили рівень вмісту довгохвильових компонентів спектру, і, таким чином, показність m_{00} . Границя дрібно-масштабних мікронерівностей у ділянці малих довжин хвиль спектру була обмежена величиною, яка не перебільшувала у 2-3 рази похибку вимірювань. Параметер широкосмугаєстості α був більше 1,8, тобто тієї величини, яка характерна для «білого шуму».

2.11. Методи дослідження наношорсткості поверхні. Наношорсткість поверхонь досліджують за допомогою атомно-силової мікроскопії (АСМ) на приладі Nanoscope за Dimension 3000 (Digital Instruments, USA) у режимі періодичного контакту [49]. Вимірювання проводили в центральній частині зразків з використанням кремнієвих зондів NSG-11 із номінальним радіусом закруглення вістря до 10 нм (NTOMDT) [49]. Профілограми поверхні знімали на приладі [49] WSxM 4.0 Develop 10.4. За результатами АСМ та профілограм визначали [49]: розміри нанокристалів у латеральному напрямку, максимальну висоту нанонерівностей та наношорсткість

поверхні за \mathbf{R}_a (середнє арифметичне відхилення профіля поверхні від середньої площини [50]).

Для безконтактного оптичного вимірювання шорсткості поверхні твердого тіла використовують тривимірний поверхневий профілограф «New View 5022 S». Характеристика приладу: вимірювана висота мікронерівностей від середньої поверхні від 1 нм до 5000 мкм при швидкості сканування 10 мкм/с з роздільною здатністю за висотою 0,1 нм; площа досліджуваної поверхні сягала 50x50 мм (можливе зшивання зображень) [51].

Принцип роботи приладу: в основу покладено явище інтерферометрії, коли зображення темних і світлих ліній з'являється з-за різниці оптичного пробігу падаючого та відбитого потоку променя від поверхні (прилад працює, використовуючи скануючий білий потік променя світла інтерферометра і дає зображення високої роздільної здатності) [51]. Падаюче світло розділяється в інтерферометрі: один промінь направлений на шорстку, а другий – на еталонну поверхню; після відбиття потоки променів рекомбінуються в інтерферометрі, даючи зображення світлих і темних ділянок зразка (програмне забезпечення дозволяє проводити вимірювання одночасно в п'яти позиціях, що приводить до малої похибки) [51].

III. Деякі зауваги до АКФ профілограм у вигляді моделі експоненціальної функції

У [55] досліджується шорстка поверхня за профілограмами, АКФ яких змодельована експоненціальною функцією:

$$R(r) = m_0 \exp(-\beta|r|), \quad (98)$$

де β – параметер, який характеризує швидкість згасання кореляцій.

Використовуючи (24) [16], для випадку (98) будемо мати вираз для СЩ профілограми [55]:

$$\Phi(k') = \frac{m_0}{2\pi} \cdot \frac{2\beta}{\beta^2 + (k')^2}. \quad (99)$$

З (98) видно, що при великих значеннях β АКФ профілограми швидко згасає, а СЩ профілограми є сталою, навіть до великих значень k' [55].

Визначимо \mathbf{m}_2 і \mathbf{m}_4 за (27) [16] шляхом введення (99) у (27), при цьому отримаємо результат, який відомий з теорії марковських процесів [46, 56, 57]: у випадковому процесі з експоненціальною АКФ середні квадрати першої та другої похідних \mathbf{m}_2 та \mathbf{m}_4 прагнуть ∞ [16, 55], що видно з експоненціальної АКФ, яка немає другої та четвертої похідних при $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ [16, 55].

Зворотне перетворення (24) [16] має вигляд:

$$R(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(k') \exp(ik'r) dk'. \quad (100)$$

Диференціювання (100) і використання (27) приводить до такого результату [16, 55]:

$$\left(\frac{d^2 R}{dr^2} \right)_{r=0} = - \int_{-\infty}^{+\infty} (k')^2 \Phi(k') dk' = -m_2; \quad (101)$$

$$\left(\frac{d^4 R}{dr^4} \right)_{r=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} (k')^4 \Phi(k') dk' = m_4. \quad (102)$$

Таким чином, щоби \mathbf{m}_2 і \mathbf{m}_4 (та, відповідно, α) існували, необхідно, щоби АКФ профілограми була надзвичайно рівною на початку процесу (тобто, щоби АКФ на початку процесу мала 2-гу та 4-ту похідні) [16, 55]. Ймовірно, що при великих \mathbf{r} АКФ $\mathbf{R}(\mathbf{r})$ і є експонента, але її не можна екстраполювати до малих \mathbf{r} [16].

Вислід з цього: теоретична експоненціальна модель АКФ відкидає існування кутів нахилу (\mathbf{m}_2) та кривин (\mathbf{m}_4) профілограм, але аналіза шорсткості поверхні за профілограмами, апроксимованої експоненціальною моделлю, практично можлива з-за кінцевості інтервалу, так як при цьому малі хвильові компоненти СЩ (тобто компоненти з великими хвильовими числами) відфільтровуються і на самому початку змінюються властивості АКФ [16]. Відфільтровка малих хвильових компонент викликає такі результати.

Якщо СЩ профілограми має вигляд [16]:

$$\Phi(k') = \frac{C}{\beta^2 + (k')^2}, \quad (103)$$

де $|k'| \leq k_0$, то з (27) отримаємо [16]:

$$m_0 = \frac{2C}{\beta} \arctg\left(\frac{k_0}{\beta}\right); \quad (104)$$

$$m_2 = 2C \left[k_0 - \beta \arctg\left(\frac{k_0}{\beta}\right) \right]; \quad (105)$$

$$m_4 = 2C \left[\frac{k_0^3}{3} - \beta^2 k_0 + \beta^3 \arctg\left(\frac{k_0}{\beta}\right) \right]. \quad (106)$$

За (12) [16]:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{k_0}{\beta}\right) \left[\frac{1}{3} \left(\frac{k_0}{\beta}\right)^3 - \left(\frac{k_0}{\beta}\right) + \arctg\left(\frac{k_0}{\beta}\right) \right] / \left[\left(\frac{k_0}{\beta}\right) - \arctg\left(\frac{k_0}{\beta}\right) \right]. \quad (107)$$

З (107) видно, що при $\left(\frac{k_0}{\beta}\right) \rightarrow \infty$, то й $\alpha \rightarrow \infty$

[16], тобто висоти вершин нерівностей мають розподіл Гаусса [16], що співпадає з [55]. Для інших $\left(\frac{k_0}{\beta}\right)$ параметер α визначають за (107),

після чого визначають статистичні характеристики профілограми і поверхні.

Модель анізотропної шорсткої поверхні у вигляді реалізації однорідного випадкового поля $z=z(x,y)$, отриманого із відповідного ізотропного поля шляхом розтягування за однією з координат, розглянута в [58, 59]. Ця модель являє собою рідкісний випадок анізотропної поверхні, яка може бути отримана при окремих видах абразивної обробки або фрикційного припрацювання.

Використовуючи апроксимації АКФ виду $R(x,y) = \exp[-(a_1x^2 + a_2y^2)]$, в [60] аналізується анізотропна поверхня. Вибір такої апроксимації пов'язаний з тим, щоби далі отримати матрицю кореляційних співвідношень для анізотропної поверхні, яка співпадала би зі структурою з матрицею кореляційних співвідношень для ізотропної поверхні. Це говорить про штучний підхід до опису анізотропної поверхні.

Цінність викладених методів у [1–7] та у цій статті полягає в тому, що використана модель шорсткої поверхні та профілограми випадкового поля, не пов'язуючи з АКФ якогось певного виду і не використовуючи припущення, які прийняті для опису поверхні іншими функціями або поверхні з сильною анізотропією і орієнтовними мікро- та нанонерівностями та не припускаючи певної форми нерівностей.

Висновки

1. Узагальнені теоретичні основи математичного опису нано- та мікроскорстких поверхонь випадковим полем. Приведені математичні формули та графічні залежності для щільності ймовірностей розподілу висот вершин випадкових анізотропної та ізотропної поверхонь, функції розподілу висот вершин, середньої кривини цих шорстких поверхонь у вершині виступів нано- та мікронерівностей та градієнтів цих поверхонь.

2. Дано означення автокореляційної функції та спектральної щільності профілограми випадкових шорстких поверхонь і приведені співвідношення між спектральними щільностями поверхонь та їх профілограмами. Дано означення моментів спектральної щільності поверхні та її профілограми.

3. Приведена процедура методу Лонге-Гітінса вибіркової аналізи ізотропної випадкової поверхні за її профілограмою та показані недоліки цього методу.

4. Узагальнені теоретичні основи математичного опису профілограм нано- та мікроскорстких поверхонь. Приведені математичні формули та графічні залежності щільності ймовірностей розподілу висот піків профілограми (максимумів), функції розподілу висот піків профілограми, кривини піків профілограми та кутового коефіцієнта профілограми ізотропної випадкової шорсткої поверхні.

5. Проведена порівняльна аналіза статистичних властивостей ізотропної випадкової шорсткої поверхні та її профілограми. Показано на значні відмінності статистичних властивостей поверхні та її профілограми при малих значеннях параметра широкосмугастости спектру (α) та малі відмінності – при великих значеннях цього параметру (α) (якщо $\alpha \rightarrow \infty$, то ці відмінності відсутні, а для кривин – малі).

6. Для аналізи анізотропної та ізотропної поверхонь знайдені математичні співвідношення та процедури знаходження моментів нульового, другого та четвертого порядків спектральної щільності профілограми та за цими результатами – розрахунків таких моментів для поверхні.

7. Розроблений метод вимірювання та статистичної аналізи шорсткості криволінійних поверхонь за еквівалентними параметрами.

8. Описані інструментальні методи дослідження нано- та мікроскорсткості поверхонь.

9. Дискутується питання про обґрунтованість вибору експоненціальних моделей автокореляційної функції профілограми для статистичної аналізи випадкових шорстких поверхонь порівняно з методом вибору моделі шорсткої поверхні та її профілограми, яка не пов'язана з певним видом автокореляційної функції та певної форми нерівностей виступів висот поверхні та її піків профілограми.

Література

1. Семенюк Н.Ф., Сиренко Г.А. Описание топографии анизотропных шероховатых поверхностей трения с помощью модели случайного поля: 1. Распределение высот вершин, средняя кривизна в вершинах, градиент поверхности // Трение и износ. – 1980. – Т.1. – №3. – С. 465 – 471.
2. Семенюк Н.Ф., Сиренко Г.А. Описание топографии анизотропных шероховатых поверхностей трения с помощью модели случайного поля: 2. Полная кривизна, главные кривизны и отношение главных кривизн в вершинах микронеровностей, удельная площадь гауссовской поверхности и удельный объем зазора // Трение и износ. – 1980. – Т.1. – №5. – С. 815 – 823.

3. **Семенюк Н.Ф., Сиренко Г.А.** Описание топографии анизотропных шероховатых поверхностей трения при помощи модели случайного поля: 3. Фактическая площадь контакта, коэффициент трения, термическое сопротивление, адгезионное взаимодействие с учетом деформации в зоне контакта // Трение и износ. – 1980. – Т.1. – №6. – С. 1010 – 1019.
4. **Сіренко Г.О., Солтис Л.М.** Моделі нанометричної та мікрометричної шорсткості поверхні твердих тіл (Огляд) // Фізика і хімія твердого тіла. – 2010. – Т. 11. – № 2. – С. 423 – 446.
5. **Сіренко Г.О., Семенюк М.Ф., Солтис Л.М.** Щільність ймовірностей розподілу висот вершин шорстких поверхонь твердих тіл, змодельованих випадковим полем // Фізика і хімія твердого тіла. – 2010. – Т. 11. – № 3. – С. 768 – 779.
6. **Сіренко Г.О., Семенюк М.Ф., Солтис Л.М.** Розподіл кривин у вершинах мікро- та нанонерівностей шорстких поверхонь твердих тіл, змодельованих випадковим полем // Фізика і хімія твердого тіла. – 2010. – Т. 11. – № 4. – С. 914 – 927.
7. **Семенюк М.Ф., Сіренко Г.О., Солтис Л.М.** Градієнт анізотропної нано- та мікрошорсткої поверхні твердого тіла, змодельованої випадковим полем // Фізика і хімія твердого тіла. – 2011. – Т. 12. – № 1. – С. 200 – 207.
8. **Семенюк М.Ф., Сіренко Г.О., Солтис Л.М.** Означення ізотропності нано- та мікрошорстких поверхонь твердих тіл під час математичного опису контактних явищ // Вісник Прикарп. нац. ун-ту ім. Василя Стефаника. Серія Хімія. – 2010. – Вип. ІХ. – С. 62 – 70.
9. **Айнбиндер С.Б., Андреева Н.Г., Тюнина Э.Л.** Параметры шероховатости контртела, определяющие износостойкость полиэтилена // Трение и износ. – 1981. – Т.11. – №1. – С. 12 – 21.
10. **Айнбиндер С.Б., Тюнина Э.Л.** Трение полимерных материалов. Расчет коэффициента трения при контакте изотропных поверхностей // Механика полимеров. – 1977. – №2. – С. 241.
11. **Айнбиндер С.Б., Тюнина Э.Л.** Трение полимерных материалов. Расчет коэффициента трения при контакте поверхностей с неровностями несферической формы // Механика полимеров. – 1977. – №4. – С. 651.
12. **Бачинская Н.К.** Исследования контактных характеристик шероховатых, сильно анизотропных поверхностей: Дис. ... канд. техн. наук: 05.02.04. – Хмельницкий, 1994. – 166 с.
13. **Лонге-Хиггинс М.С.** Статистическая геометрия случайных поверхностей // Гидродинамическая неустойчивость. – Москва: Мир, 1964. – С.124 – 167.
14. **Романишина О.В., Семенюк Н.Ф.** Предварительное смещение единичного выступа при различных режимах нагружения // Проблемы трибологии. – 1997. – №2. – С. 35–51.
15. **Романишина О.В.** Исследования предварительного смещения упругого контакта шероховатых изотропных поверхностей: Дис. ... канд. техн. наук: 05.02.04. – Хмельницкий, 1998. – 178 с.
16. **Найяк П.Р.** Применение модели случайного поля для исследования шероховатых поверхностей // Проблемы трения и смазки. – 1971. – Т.93. – Сер. F. – №3. – С. 85-95.
17. **Семенюк Н.Ф., Калмыкова Т.Ф.** Фактическая площадь упругого контакта анизотропной шероховатой поверхности с гладкой // Трение и износ. – 1983. – Т.4. – №3. – С. 467 – 475.
18. **Семенюк Н.Ф.** Плотность вероятности высот вершин. Характеристики вершин анизотропной шероховатой поверхности // Трение и износ. – 1986. – Т.7. – № 6. – С. 1017 – 1024.
19. **Семенюк Н.Ф., Романишина О.В.** Предварительное смещение шероховатых изотропных поверхностей. I. // Проблемы трибологии. – 1997. – №4. – С. 90 – 101.
20. **Семенюк Н.Ф., Романишина О.В.** Рассеяние энергии на единичном контакте в режиме предварительного смещения // Проблемы трибологии. – 1997. – №2. – С. 52–56.
21. **Семенюк Н.Ф., Сиренко Г.А.** Топография и контактные явления анизотропных шероховатых поверхностей трения // Тез. докл. Всесоюз. науч.-техн. конфер. «Трибоника и антифрикционное материаловедение». – Новочеркасск. 27-29.05.1980. – Новочеркасск: Изд-во Новочеркас. политех. ин-та, 1980. – С. 22.
22. **Семенюк Н.Ф., Соколан К.С.** Кривизна в вершинах выступів поверхонь тертя поршневих ущільнень // Проблемы трибологии. – 2000. – №2.
23. **Семенюк Н.Ф., Соколан Е.С.** Основное уравнение контактирования элементов бессмазочных поршневых уплотнений // Проблемы трибологии. – 2002. – №1.
24. **Семенюк Н.Ф.** Средние значения полной и средней кривизн в вершинах, высоты неровностей анизотропной шероховатой поверхности // Трение и износ. – 1986. – Т.7. – № 5. – С. 830 – 840.
25. **Семенюк Н.Ф.** Средняя высота выступов шероховатой поверхности и плотность пятен контакта при контактировании шероховатой поверхности с гладкой // Трение и износ. – 1986. – Т.7. – №1. – С. 85–90.
26. **Свирденко А.И., Калмыкова Т.Ф.** Исследование фактической площади фрикционного контакта полимер – металл с помощью акустических колебаний. Сооб. 1 // Трение и износ. – 1980. – Т.1. – №5. – С. 898 – 907.
27. **Свирденко А.И., Калмыкова Т.Ф., Холодилов О.В.** Исследование фактической площади

- фрикционного контакта полимер – металл с помощью акустических колебаний. Сооб. 2 // Трение и износ. – 1982. – Т.3. – №5. – С. 808 – 812.
28. **Семенюк Н.Ф., Бачинская Н.К.** Слияние пятен контакта при нагружении шероховатых, сильно анизотропных поверхностей // Проблемы трибологии. – 1998. – №3. – С. 103 – 107.
 29. **Семенюк Н.Ф., Калда Г.С., Соколан Е.С.** Использование метода случайных полей при расчете параметров шероховатости, влияющих на тепловые процессы в трущихся телах // Проблемы трибологии. – 1996. – №1.
 30. **Семенюк Н.Ф., Терлецкая Е.В.** Моделирование шероховатых изотропных поверхностей. Сообщение I // Проблемы трибологии. – 1998. – №1. – С. 83 – 89.
 31. **Семенюк Н.Ф., Терлецкая Е.В.** Моделирование шероховатых изотропных поверхностей. Сообщение II // Проблемы трибологии. – 1998. – №1. – С. 90 – 97.
 32. **Сиренко Г, Кедик М.** Вплив анізотропної шорсткості поверхонь, змодельованих випадковим полем, на контактні явища // Вісник Прикарп. нац. ун-ту ім. Василя Стефаника. Серія Хімія. – 2004. – Вип. IV. – С. 50 – 53.
 33. **Сиренко Г., Семенюк М.** Адгезія з деформацією в зоні контакту анізотропних шорстких поверхонь, змодельованих випадковим полем // Вісник Прикарп. нац. ун-ту ім. Василя Стефаника. Серія Хімія. – 2001. – Вип. I. – С. 66 – 85.
 34. **Сиренко Г.О.** Створення антифрикційних матеріалів на основі порошків термостійких полімерів та вуглецевих волокон: Дис. на здобуття наук. ступеня докт. технічних наук: спец. 05.16.06 – порошкова металургія та композиційні матеріали, Хмельницький технологічний ін-т. – Захищ. 8.12.1997 в Ін-ті проблем матеріалознавства ім. І.М. Францевича НАНУ – Київ, 1997. – 537 с.: іл., табл. – Бібліогр.: с. 432 – 451 (275 назв).
 35. **Сиренко Г.А.** Осложнение контактных явлений поверхности уплотнительных материалов анизотропной микрошероховатости // Тез. докл. 3-го Всесою. совещания по уплотнительной технике. ВНИИкомпрессормаш. – Сумы, 1982. – С. 44 – 45.
 36. **Сиренко Г.А., Семенюк Н.Ф.** Методика определения моментов спектральной плотности шероховатых поверхностей уплотнительной пары // Тез. докл. 3-го Всесою. совещания по уплотнительной технике. ВНИИкомпрессормаш. – Сумы, 1982. – С. 46 – 47.
 37. **Терлецкая Е.В.** Исследование характеристик фрикционного упругого контакта шероховатых изотропных поверхностей: Дис. ... канд. техн. наук: 05.02.03, Хмельницкий, 1996. – 195 с.
 38. **Longuet-Higgins M.S.** On the statistical distribution of the highs of sea waves // J. Marine Research. – 1952. – Vol.11. – N3. – P. 245.
 39. **Longuet-Higgins M.S.** Statistical Properties of a moving waveform // Proc. Cambridge Philos. Soc. – London, 1956. – N52. – P. 234.
 40. **Longuet-Higgins M.S.** Statistical Properties of an isotropic random surface // Philos. Trans. of the Royal Soc. – London, 1957. – Vol.250. – Ser. A. – P. 157-174.
 41. **Longuet-Higgins M.S.** The Statistical Analysis of a Random Moving Surface // Philos. Trans. of the Royal Soc. – London, 1957. – Vol.249. – Ser. A. – P. 321-387.
 42. **Longuet-Higgins M.S.** The Statistical distribution of the curvature of a random Gaussian surface // Proc. Cambridge Philos. Soc. – London, 1958. – N54. – P. 439.
 43. **Хусу А.П., Виттенберг Ю.Р., Пальмов В.А.** Шероховатость поверхностей. Теоретико-вероятностный подход. – Москва: Наука, 1975. – 344 с.
 44. **Ядренко М.И.** Спектральная теория случайных полей. – Київ: Вища шк., 1980. – 208 с.
 45. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – Изд. второе, исп. / Пер. с англ. Н.В. Леви; под. ред. К.А. Семендяева. – Москва: Наука, 1966. – 228 с.
 46. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров / Пер. И.Г. Арамановича, А.М. Березмана, И.А. Войнштейна и др. – Москва: Наука, 1978. – 832 с.
 47. **Gartwright D.E., Longuet-Higgins M.S.** The statistical distribution of the maxima of a random function // Proceedings of the Royal Soc. – London. – 1956. – Vol.237. – Ser. A., N1209 – P. 212.
 48. **Rice S.O.** Mathematical Analysis of Random Noise // Selected Paper on Noise and Stochastic.
 49. **Термоелектричні властивості тонких плівок PbTe при витримці на повітрі / Д.М. Фреїк, І.К. Юрчишин, В.В. Бачук та ін. // Фізика і хімія твердого тіла. – 2010. – Т. 11. – № 3. – С. 598 – 603.**
 50. **Розмірні ефекти в термоелектричних властивостях наноструктурних плівок телуриду свинцю / Д.М. Фреїк, А.П. Шпак, Б.С. Дзундза та ін. // Фізика і хімія твердого тіла. – 2010. – Т. 11. – № 2. – С. 356 – 360.**
 51. **Іваніцька В.Г.** Взаємодія поверхні CdTe різної кристалографічної орієнтації з розчинами на основі I₂ та H₂O₂ – НІ. – Дис.... к.х.н. – Прикарп. нац. ун-т ім. В. Стефаника, 2008. – 161 с.
 52. **Сэйлс Р.С., Томас Т.Р.** Измерение статистических характеристик микрогеометрии поверхностей, вступающих в технику // Проблемы трения и смазки. – 1979. – № 4. – С. 16 – 28.
 53. **Дунин-Барковский И.В., Карташова А.Н.** Измерение и анализ шероховатости, волнистости и

- некруглости поверхности. – Москва: Машиностроение, 1978. – 232 с.
54. **Щербинский В.Г.** Индикатор шероховатости поверхности // Трение и износ. – 1991. – Т.12. – № 6. – С. 1133 – 1135.
 55. **Whitehouse D.J., Archard J.F.** The properties of random surfaces of significance in their contact // Proceedings of the Royal Society. – 1970. – Vol.316. – Ser. A. – P. 97 – 121.
 56. **Майн Х., Осаки С.** Марковские процессы принятия решений / Пер. с англ. В.В. Калашникова, В.С. Манусевича / Под ред. Н.П. Бусленко. – Москва: Наука, 1977. – 176 с.
 57. **Сигорский В.П.** Математический аппарат инженера. – Киев: Техніка, 1977. – 768 с.
 58. **Гупта П.К., Кук Н.Х.** Статистический анализ механического взаимодействия шероховатых поверхностей // Проблемы трения и смазки. – 1972. – Т.94, №1. – С. 14.
 59. **Kubo M., Peklenik J.** An analysis of micro-geometrical isotropy for random surfaces structures // Ann. of CIRP. – 1968. – Vol.16. – P. 235.
 60. **Кризберг Ю.Я., Кокин В.П., Рудзит Я.А.** Определение микро топографических параметров нерегулярной шероховатости // Технологические методы повышения качества поверхности деталей машин. – Ленинград: Ленинградский университет, 1978. – С. 152.

Сіренко Г.О. – професор, доктор технічних наук, завідувач кафедри теоретичної та прикладної хемії.

Семенюк М.Ф. – професор, доктор технічних наук, професор кафедри машинознавства.

Солтис Л.М. – аспірант кафедри теоретичної та прикладної хемії.

Рецензент

Мідак Л.Я. – кандидат хімічних наук, доцент кафедри теоретичної та прикладної хемії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.