

Г.О. Сіренко¹, М.Ф. Семенюк², Л.М. Солтис¹

Щільність ймовірностей розподілу висот вершин шорстких поверхонь твердих тіл, змодельованих випадковим полем

¹Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
вул. Шевченка, 57, м. Івано-Франківськ, 76025, Україна

Тел. (0342) 77.64.15; (096) 813.93.53, e-mail: sirenkog@rambler.ru

²Хмельницький національний університет,

вул. Інститутська, 11, м. Хмельницький, 29016, Україна

Приведений математичний опис анізотропних шорстких поверхонь твердих тіл за допомогою моделі випадкового поля. Показано, що з формул для щільності ймовірностей висот вершин моделі анізотропної поверхні витікають формули для ізотропної поверхні.

Ключові слова: математична модель, фізична модель, тверде тіло, шорстка поверхня, контактні явища, анізотропна поверхня, ізотропна поверхня, випадкова функція, випадкове поле.

Стаття поступила до редакції 20.03.2010; прийнята до друку 29.06.2010.

Вступ

Одним із найбільш вагомих факторів, який утруднює математичний опис шорсткості поверхонь твердих тіл, є її нерегулярність, що виникає в результаті механічних, фізичних та фізико-хімічних способів обробки та формування поверхонь твердих тіл, яка і викликає необхідність застосування для її опису та аналізу теоретико-ймовірнісних методи [1, 2]. У [3] приведений огляд літературних джерел інформації, що описують методи, параметри і фізичні моделі опису нанометричної та мікрометричної шорсткості поверхонь твердих тіл за допомогою теоретико-математичних моделей.

Дослідження шорсткої поверхні методами одномірних випадкових функцій [4–8] базуються на двох припущеннях:

- статистичні характеристики поверхні приймаються рівними статистичним характеристикам профілограми цієї ж поверхні;
- вершини нерівностей вважають сферичними.

Профілограма вказує на менше число високих піків порівняно з дійсним числом високих вершин на поверхні, тому що профілограма з більшою ймовірністю проходить по схилу виступу поверхні, ніж по вершині [9].

Таким чином, перше припущення приводить до помилки при визначенні розподілу висот вершин, кривини і градієнту поверхні: профілограма дає занижені ймовірності високих вершин, кривини у вершинах і середні градієнти.

Для опису статистично однорідної ізотропної поверхні в [10–16] при дослідженні поверхні океану

при хвилюванні і в [9] при вивченні ізотропної поверхні твердого тіла застосували випадкову функцію для двох змінних $z=z(\mathbf{x},\mathbf{y})$, яка має автокореляційну функцію (АКФ) $\mathbf{R}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ [9].

Лонгет-Гігінс отримав співвідношення для щільності піків анізотропної гауссовської поверхні [14, 15], а в [10] розглядає питання про кутові коефіцієнти і градієнти такої поверхні.

Наближені методи отримання характеристик анізотропної поверхні на основі теорій випадкових функцій і з використанням кривої опорної поверхні, а також пов'язані з ними методи розрахунків фактичної площі контакту, оцінки триботехнічних властивостей контактуючої поверхні узагальнені в [17, 18].

Найяк [9] отримав розподіл висот вершин, середню кривину у вершині та градієнт ізотропної поверхні, а також висоти та кривини піків і кутовий коефіцієнт профілограми цієї ж поверхні.

Крім того, Найяк [9] розглянув методику знаходження моментів спектральної щільності ізотропної поверхні за однією профілограмою, яка виміряна у довільному напрямку, а також показав відмінності щільності ймовірностей висот вершин поверхні і піків профілограми від очікуваних значень, кривин вершин поверхні та кривин піків профілограми [9].

Найяк [9] показав на значну статистичну різницю між даними профілограми та поверхні, яка зростає по мірі зміни параметра широкосмужності α від ∞ до 1,5. Встановлена відмінність статистичних характеристик поверхні та профілограми, ймовірно, суттєва і для анізотропної поверхні.

У [19–53] дано опис топографії анізотропних та ізотропних поверхонь за допомогою моделей випадкового поля та приводиться зв'язок параметрів цих моделей з параметрами контактних явищ, зокрема при терті та зношуванні твердих тіл.

Модель анізотропної шорсткої поверхні у вигляді реалізації однорідного випадкового поля $z=z(x,y)$, отриманого із відповідного ізотропного поля шляхом розтягування за однією з координат, розглянута в [54, 55]. Ця модель являє собою рідкісний випадок анізотропної поверхні, яка може бути отримана при окремих видах абразивної обробки або фрикційного припрацювання.

Використовуючи рідкісний випадок апроксимації АКФ виду:

$$R(x, y) = \exp[-(a_1x^2 + a_2y^2)], \quad (1)$$

в [56] аналізується анізотропна поверхня. Вибір такої апроксимації пов'язаний з тим, щоби далі отримати матрицю кореляційних співвідношень для анізотропної поверхні, яка співпадала би зі структурою з матрицею кореляційних співвідношень для ізотропної поверхні. Це говорить про штучний підхід за апроксимації (1) до опису анізотропної поверхні.

Взагалі, апроксимація АКФ функціями визначеного виду [4, 7, 57–60] веде до згрублення випадкового процесу і може бути джерелом похибок при визначенні спектральної щільності (СЩ), необгрунтованість подібного підходу показана в [9].

Відзначимо, що в [61] аналізується поодиноким випадком анізотропної поверхні, яка має виступи з великим ексцентриситетом і орієнтованих в одному напрямку, причому вісь ОХ орієнтована в подовженому напрямку мікронерівностей. Тоді в силу симетрії будемо мати такі співвідношення моментів СЩ: $m_{11} = m_{13} = m_{31} = 0$. Крім того, $m_{04} \gg m_{40}$, що рівнозначно $m_{02} \gg m_{20}$. Для опису такої поверхні необхідно мати п'ять параметрів: дисперсію висот поверхні відносно середньої площини m_{00} , середні квадрати кутів нахилу в двох головних напрямках m_{20} і m_{02} і середні квадрати двох головних кривин m_{40} і m_{04} .

Мета роботи полягала в дослідженні зміни щільності ймовірностей висот вершин шорстких поверхонь, змодельованої випадковим полем, – полімерного композиту та сталі, які знаходились в контакті, – під час тертя та зношування без мащення в часі (при зміні шляху тертя) при різних вихідних шорсткостях поверхні сталі.

I. Теоретична частина

1. Використовуючи модель випадкового поля шорсткої поверхні і не пов'язуючи її з АКФ якогось певного виду, і не використовуючи припущення, які прийняті для опису поверхні одномірними випадковими функціями або поверхні з сильною анізотропією і орієнтованими мікронерівностями, а також не припускаючи певної форми нерівностей, в [19] отримано співвідношення для щільності ймовірності висот вершин.

2. Нехай анізотропна шорстка поверхня описана рівнянням $z = z(x, y)$, де z – випадкова функція для

двох змінних x і y (випадкове поле), а x, y – декартові координати на середній площині висот шорсткої поверхні, але разом з тим статистичні характеристики поверхні залежать від напрямків $\theta = \arctg(k_y/k_x)$ та інваріантні до переміщення початку координат на поверхні (однорідна поверхня).

3. Випадкова функція z , яка описує таку шорстку статистично однорідну анізотропну поверхню, має автокореляційну функцію $R(x, y)$ і допускає її спектральний розклад Фур'є $\Phi(k_x, k_y)$ на гармонічні компоненти, де k_x, k_y – компоненти хвильового вектора \bar{k} , який дорівнює $\bar{k} = 2\pi / \lambda$ з довжиною хвилі λ .

4. Моменти спектральної щільності. Завдяки статистичній однорідності випадкової поверхні її характеристики можна виразити через моменти спектральної щільності m_{pq} або їх інваріантні комбінації. Спектральна щільність (СЩ) $\Phi(k_x, k_y)$ має вигляд [9, 15]:

$$\Phi(k_x, k_y) = \frac{1}{4p^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(x, y) \times \exp[-i(xk_x + yk_y)] dx dy, \quad (2)$$

де автокореляційну функцію (АКФ) за визначенням [9, 15] запишемо так:

$$R(x, y) = \lim_{\substack{L_x \rightarrow \infty \\ L_y \rightarrow \infty}} \frac{1}{4L_x L_y} \int_{-L_x}^{L_x} \int_{-L_y}^{L_y} z(x_1, y_1) \times z(x_1 + x, y_1 + y) dx_1 dy_1. \quad (3)$$

Якщо шорстка поверхня ізотропна, то функція $R(x, y)$ залежить лише від змінної $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ і не залежить від полярного кута $\theta = \arctg(y/x)$. Зворотне перетворення Фур'є записується так [15]:

$$R(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_x, k_y) \times \exp[i(xk_x + yk_y)] dk_x dk_y. \quad (4)$$

З виразу (3) видно, що $R(0, 0) = \sigma^2$, де σ^2 – дисперсія, а σ – середнє квадратичне (стандартне) відхилення висоти нерівностей [9, 15]. Тому з (4) витікає [9, 15]:

$$S^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_x, k_y) dk_x dk_y. \quad (5)$$

Вираз (5) відбиває те, що функція $\Phi(k_x, k_y)$ визначає той внесок у величину дисперсії σ^2 , який додає різні спектральні компоненти, що відповідають хвилям з хвильовим числом k і довжинами [15]:

$$l = 2p / |k| \quad (6)$$

та напрямками [15]:

$$q = \arctg(k_x / k_y). \quad (7)$$

Для ізотропних поверхонь функція Φ залежить тільки від змінної $k \equiv |k|$.

Моменти СЩ визначаються так [9, 15]:

$$m_{pq} = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_x, k_y) k_x^p k_y^q dk_x dk_y, \quad (8)$$

де Re – дійсна частина числа.

Згідно (8) маємо: $\mathbf{m}_{00} = \sigma^2$.

5. Загальна теорія випадкового поля викладена в [1, 53]. Для інтегральних перетворень використали [62, 63].

6. Введемо змінні

$$\begin{aligned} e_1 &= z; e_2 = \partial z / \partial x; e_3 = \partial z / \partial y; e_4 = \partial^2 z / \partial x^2; \\ e_5 &= \partial^2 z / \partial x \partial y; e_6 = \partial^2 z / \partial y^2. \end{aligned} \quad (9)$$

7. За Лонгет-Гітінсом для даного випадку сформулюємо центральну граничну теорему теорії ймовірностей таким чином: нехай маємо \mathbf{n} величин e_1, \dots, e_n , кожна з яких представляє собою суму великої кількості незалежних величин з нулевим математичним сподіванням, тоді, за загальних умов [64], сумісна щільність ймовірностей величин e_i визначається \mathbf{n} -мірним гауссовським законом [9, 64]:

$$p(e_1, \dots, e_n) = (2p)^{-n/2} \Delta^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} M_{ij} e_i e_j\right) \quad (10)$$

де $M_{ij} = (N_{ij})^{-1}$; $\Delta = \det(N_{ij})$;

$$(N_{ij}) = \begin{pmatrix} \overline{e_1^2} & \overline{e_1 e_2} & \dots & \overline{e_1 e_n} \\ e_2 e_1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{e_n e_1} & \dots & \dots & \overline{e_n^2} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Елемент $\overline{e_i e_j}$ матриці (11) визначається так:

$$\begin{aligned} \overline{e_i e_j} &= \iint \dots \iint_{\Omega} e_i(x_1, \dots, x_k) e_j(x_1, \dots, x_k) \times \\ &\times p(x_1) p(x_2) \dots p(x_k) dx_1, \dots, dx_k, \end{aligned} \quad (12)$$

де Ω – ймовірний простір незалежних випадкових величин x_i , від яких залежить e_i .

8. Використовуючи визначення похідних і збіжності в середньому квадратичному і ототожнюючи їх (з ймовірністю, яка дорівнює одиниці) з похідними математичного аналізу, встановимо, використовуючи [65], кореляційні зв'язки між випадковою функцією $\mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ і її похідними (табл. 1).

Послідовно диференціюючи АКФ (3) для точки $x=0; y=0$, отримаємо вирази для похідних АКФ через \mathbf{m}_{pq} -моменти із співвідношень (8) [19]:

$$R(0,0) = S^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_x, k_y) k_x^0 k_y^0 dk_x dk_y = m_{00}; \quad (13)$$

$$\frac{\partial^{p+q} R}{\partial x^p \partial y^q} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_x, k_y) k_x^p k_y^q dk_x dk_y; \quad (14)$$

$$\frac{\partial R}{\partial x}(0,0) = 0; \quad \frac{\partial R}{\partial y}(0,0) = 0; \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}(0,0) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_x, k_y) k_x^2 k_y^0 dk_x dk_y = -m_{20}; \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y}(0,0) = -m_{11}; \quad \frac{\partial^2 R}{\partial y^2}(0,0) = -m_{02}; \quad (17)$$

$$\frac{\partial^3 R}{\partial x^3}(0,0) = 0; \quad \frac{\partial^3 R}{\partial x^2 \partial y}(0,0) = 0; \quad (18)$$

$$\frac{\partial^3 R}{\partial x \partial y^2}(0,0) = 0; \quad \frac{\partial^3 R}{\partial y^3}(0,0) = 0; \quad (19)$$

$$\frac{\partial^4 R}{\partial x^4}(0,0) = m_{40}; \quad \frac{\partial^4 R}{\partial x^3 \partial y}(0,0) = m_{31}; \quad (20)$$

Таблиця 1

Математичне сподівання добутку двох випадкових величин [19]

Випадкова величина	$z(x, y)$	$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$	$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y)$	$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y)$	$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, y)$
$z(x+a, y+b)$	$R(a, b)$	$-\frac{\partial R}{\partial x}(a, b)$	$-\frac{\partial R}{\partial y}(a, b)$	$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}(a, b)$	$\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y}(a, b)$	$\frac{\partial^2 R}{\partial y^2}(a, b)$
$\frac{\partial z}{\partial x}(x+a, y+b)$	$\frac{\partial R}{\partial x}(a, b)$	$-\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}(a, b)$	$-\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y}(a, b)$	$\frac{\partial^3 R}{\partial x^3}(a, b)$	$\frac{\partial^3 R}{\partial x^2 \partial y}(a, b)$	$\frac{\partial^3 R}{\partial x \partial y^2}(a, b)$
$\frac{\partial z}{\partial y}(x+a, y+b)$	$\frac{\partial R}{\partial y}(a, b)$	$-\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y}(a, b)$	$-\frac{\partial^2 R}{\partial y^2}(a, b)$	$\frac{\partial^3 R}{\partial x^2 \partial y}(a, b)$	$\frac{\partial^3 R}{\partial x \partial y^2}(a, b)$	$\frac{\partial^3 R}{\partial y^3}(a, b)$
$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x+a, y+b)$	$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}(a, b)$	$-\frac{\partial^3 R}{\partial x^3}(a, b)$	$-\frac{\partial^3 R}{\partial x^2 \partial y}(a, b)$	$\frac{\partial^4 R}{\partial x^4}(a, b)$	$\frac{\partial^4 R}{\partial x^3 \partial y}(a, b)$	$\frac{\partial^4 R}{\partial x^2 \partial y^2}(a, b)$
$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x+a, y+b)$	$\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y}(a, b)$	$-\frac{\partial^3 R}{\partial x^2 \partial y}(a, b)$	$-\frac{\partial^3 R}{\partial x \partial y^2}(a, b)$	$\frac{\partial^4 R}{\partial x^3 \partial y}(a, b)$	$\frac{\partial^4 R}{\partial x^2 \partial y^2}(a, b)$	$\frac{\partial^4 R}{\partial x \partial y^3}(a, b)$
$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x+a, y+b)$	$\frac{\partial^2 R}{\partial y^2}(a, b)$	$-\frac{\partial^3 R}{\partial x \partial y^2}(a, b)$	$-\frac{\partial^3 R}{\partial y^3}(a, b)$	$\frac{\partial^4 R}{\partial x^2 \partial y^2}(a, b)$	$\frac{\partial^4 R}{\partial x \partial y^3}(a, b)$	$\frac{\partial^4 R}{\partial y^4}(a, b)$

$$\frac{\partial^4 R}{\partial x^2 \partial y^2}(0,0) = m_{22}; \quad \frac{\partial^4 R}{\partial x \partial y^3}(0,0) = m_{13}; \quad (21)$$

$$\frac{\partial^4 R}{\partial y^4}(0,0) = m_{04}. \quad (22)$$

9. Прирівнюючи $a=0, b=0$ (табл. 1), будемо мати матрицю кореляційних зв'язків змінних e_1, \dots, e_6 [9, 15]:

$$(N_{ij}) = \begin{pmatrix} m_{00} & 0 & 0 & -m_{20} & -m_{11} & -m_{02} \\ 0 & m_{20} & m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{11} & m_{02} & 0 & 0 & 0 \\ -m_{20} & 0 & 0 & m_{40} & m_{31} & m_{22} \\ -m_{11} & 0 & 0 & m_{31} & m_{22} & m_{13} \\ -m_{02} & 0 & 0 & m_{22} & m_{13} & m_{04} \end{pmatrix}, \quad (23)$$

де N_{ij} – математичне сподівання $e_i e_j$.

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} m_{20} & m_{11} \\ m_{11} & m_{02} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} m_{40} & m_{31} & m_{22} \\ m_{31} & m_{22} & m_{13} \\ m_{22} & m_{13} & m_{04} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -m_{20} & m_{31} & m_{22} \\ -m_{11} & m_{22} & m_{13} \\ -m_{02} & m_{13} & m_{04} \end{vmatrix}; \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} -m_{20} & m_{40} & m_{22} \\ -m_{11} & m_{31} & m_{13} \\ -m_{02} & m_{22} & m_{04} \end{vmatrix}; \\ \Delta_5 &= \begin{vmatrix} -m_{20} & m_{40} & m_{31} \\ -m_{11} & m_{31} & m_{22} \\ -m_{02} & m_{22} & m_{13} \end{vmatrix}; \quad \Delta_6 = \begin{vmatrix} m_{00} & -m_{11} & -m_{02} \\ -m_{11} & m_{22} & m_{13} \\ -m_{02} & m_{13} & m_{04} \end{vmatrix}; \quad \Delta_7 = \begin{vmatrix} m_{00} & -m_{20} & -m_{02} \\ -m_{11} & m_{31} & m_{13} \\ -m_{02} & m_{22} & m_{04} \end{vmatrix}; \quad \Delta_8 = \begin{vmatrix} m_{00} & -m_{20} & -m_{11} \\ -m_{11} & m_{31} & m_{22} \\ -m_{02} & m_{22} & m_{13} \end{vmatrix}; \\ \Delta_9 &= \begin{vmatrix} m_{00} & -m_{20} & -m_{02} \\ -m_{20} & m_{40} & m_{22} \\ -m_{02} & m_{22} & m_{04} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{10} = \begin{vmatrix} m_{00} & -m_{20} & -m_{11} \\ -m_{20} & m_{40} & m_{31} \\ -m_{02} & m_{22} & m_{13} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{11} = \begin{vmatrix} m_{00} & -m_{20} & -m_{11} \\ -m_{20} & m_{40} & m_{31} \\ -m_{11} & m_{31} & m_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (25)$$

11. У випадку ізотропної поверхні на підставі, що $m_{00}=m_0; m_{20}=m_{02}=m_2; m_{11}=m_{13}=m_{31}=0; 3m_{22}=m_{40}=m_{04}=m_4$ [9, 15] отримаємо вираз для матриці (M_{ij}) [9]:

$$(M_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{2m_4}{\Delta_1} & 0 & 0 & \frac{3m_2}{2\Delta_1} & 0 & \frac{3m_2}{2\Delta_1} \\ 0 & \frac{1}{m_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3m_2}{2\Delta_1} & 0 & 0 & \frac{9\Delta_2}{4m_4\Delta_1} & 0 & -\frac{3\Delta_3}{4m_4\Delta_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{m_4} & 0 \\ \frac{3m_2}{2\Delta_1} & 0 & 0 & -\frac{3\Delta_3}{4m_4\Delta_1} & 0 & \frac{9\Delta_2}{4m_4\Delta_1} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

де

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= (2m_0m_4 - 3m_2^2) = m_2^2 \left(\frac{2m_0m_4}{m_2^2} - 3 \right) = m_2^2 (2a - 3); \\ \Delta_2 &= (m_0m_4 - m_2^2) = m_2^2 \left(\frac{m_0m_4}{m_2^2} - 1 \right) = m_2^2 (a - 1); \\ \Delta_3 &= (m_0m_4 - 3m_2^2) = m_2^2 \left(\frac{m_0m_4}{m_2^2} - 3 \right) = m_2^2 (a - 3); \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

10. Визначивши елементи матриці $(M_{ij})=(N_{ij})^{-1}$, для анізотропної поверхні отримаємо [19]:

$$(M_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_2}{\Delta_{12}} & 0 & 0 & -\frac{\Delta_3}{\Delta_{12}} & \frac{\Delta_4}{\Delta_{12}} & -\frac{\Delta_5}{\Delta_{12}} \\ 0 & \frac{m_{02}}{\Delta_1} & -\frac{m_{11}}{\Delta_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{m_{11}}{\Delta_1} & \frac{m_{20}}{\Delta_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\Delta_3}{\Delta_{12}} & 0 & 0 & \frac{\Delta_6}{\Delta_{12}} & -\frac{\Delta_7}{\Delta_{12}} & \frac{\Delta_8}{\Delta_{12}} \\ \frac{\Delta_4}{\Delta_{12}} & 0 & 0 & -\frac{\Delta_7}{\Delta_{12}} & \frac{\Delta_9}{\Delta_{12}} & -\frac{\Delta_{10}}{\Delta_{12}} \\ \frac{\Delta_5}{\Delta_{12}} & 0 & 0 & \frac{\Delta_8}{\Delta_{12}} & -\frac{\Delta_{10}}{\Delta_{12}} & \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{12}} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

де $\Delta = \det N$; $\Delta_{12} = m_{00}\Delta_2 + m_{20}\Delta_3 - m_{11}\Delta_4 + m_{02}\Delta_5$;

$a = \frac{m_0m_4}{m_2^2}$ – параметр широкосмужності, що

пов'язаний з характеристичною шириною спектральної щільності ізотропної поверхні: широкий спектр містить великий діапазон довжин хвиль, а у випадку вузького спектру всі хвилі мають приблизно однакову довжину. Параметр a змінюється від 1,5 до ∞ . Якщо $a \rightarrow 1,5$, то характеристична ширина зменшується, а при $a \rightarrow \infty$ – вона зростає [9], тоді:

- для $a=1,5$ $\Delta_1 = 0$; $\Delta_2 = \frac{1}{2}m_2^2$; $\Delta_3 = -\frac{3}{2}m_2^2$;
- для $a \rightarrow \infty$ $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \rightarrow \infty$.

Середнє квадратичне значення ширини ізотропного спектру характеризує параметр:

$$\Lambda = 1 - \frac{1}{a} = \frac{m_0m_4 - m_2^2}{m_0m_4}, \quad \Lambda = 0,333(3) \dots 1,0, \quad (28)$$

- при $a=1,5$ $\Lambda=0,333(3)$;
- при $a \rightarrow \infty$ $\Lambda \rightarrow 1$.

Визначник Δ матриці (N_{ij}) (23) дорівнює [9]:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{4}{27} (m_2m_4)^2 (2m_0m_4 - 3m_2^2) = \\ &= \frac{4}{27} (m_2m_4)^2 \Delta_1 = \frac{4}{27} m_2^4 m_4^2 (2a - 3), \end{aligned} \quad (29)$$

- при $a=1,5$ $\Delta=0$;
- при $a \rightarrow \infty$ $\Delta \rightarrow \infty$.

12. Використовуючи центральну граничну теорему теорії ймовірностей (10), знайдено вираз для сумісної щільності ймовірностей змінних e_1, \dots, e_6 :

- для анізотропної поверхні [19]:

$$p(e_1, \dots, e_6) = (2p)^{-3} \Delta^{-1/2} \exp\left(-\frac{\Delta_2}{2\Delta_{12}} e_1^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_{12}} e_1 e_4 - \frac{\Delta_4}{\Delta_{12}} e_1 e_5 + \frac{\Delta_5}{\Delta_{12}} e_1 e_6 - \frac{m_{02}}{2\Delta_1} e_2^2 + \frac{m_{11}}{\Delta_1} e_2 e_3 - \frac{m_{20}}{2\Delta_1} e_3^2 - \frac{\Delta_6}{2\Delta_{12}} e_4^2 + \frac{\Delta_7}{\Delta_{12}} e_4 e_5 - \frac{\Delta_8}{\Delta_{12}} e_4 e_6 - \frac{\Delta_9}{2\Delta_{12}} e_5^2 + \frac{\Delta_{10}}{\Delta_{12}} e_5 e_6 - \frac{\Delta_{11}}{2\Delta_{12}} e_6^2\right). \quad (30)$$

- для ізотропної поверхні [9]:

$$p(e_1, \dots, e_6) = (2p)^{-3} \Delta^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\frac{2m_4}{\Delta_1} e_1^2 + \frac{9\Delta_2}{4m_4\Delta_1} (e_4^2 + e_6^2) + \frac{3}{m_4} e_5^2 + \frac{3m_2}{\Delta_1} e_1 (e_4 + e_6) - \frac{3\Delta_3}{2m_4\Delta_1} e_4 e_6 + \frac{1}{m_2} (e_2^2 + e_3^2) \right]\right\}. \quad (31)$$

13. У [9] прийняли припущення, що висоти шорсткої поверхні $z=z(x,y)$ можна показати у вигляді нескінченної суми:

$$z(x, y) = \sum_n C_n \cos(xk_{xn} + yk_{yn} + x_n), \quad (32)$$

розуміючи при цьому, що в будь-якому елементі $dk_x dk_y$ площини хвильових чисел міститься нескінченна множина k_{xn}, k_{yn} , а ξ_n – є випадковою фазою, яка має рівномірний розподіл в інтервалі $(0, 2\pi)$. Тут коефіцієнти C_n зв'язані з спектральною щільністю співвідношенням:

$$\Phi(k_x, k_y) dk_x dk_y = \frac{1}{2} \sum_{\Delta k} C_n^2. \quad (33)$$

У виразі (33) сумування проводиться за всіма n таким чином, що точка (k_{xn}, k_{yn}) знаходиться в середині елемента $dk_x dk_y$ в околі точки (k_x, k_y) . Із (8) та (33) витікає [9], що спектральний момент нульового порядку:

$$m_{00} = S^2 = \frac{1}{2} \sum_n C_n^2, \quad (34)$$

а спектральний момент pq -порядку:

$$m_{pq} = \frac{1}{2} \sum_n k_{xn}^p k_{yn}^q C_n^2. \quad (35)$$

Зауважимо, що коли величина ξ_n розподілена нерівномірно в інтервалі $(0; 2\pi)$, то шлях досліджень [9], на відміну від наведеного вище (10) – (30) [19], не приводить до кінцевого результату, тому що при виведенні співвідношень для e_{ij} суттєвим є рівномірний розподіл фази.

14. Виходячи з умов існування максимуму функції $z(x, y)$, з (30) отримано вираз для щільності висот вершин анізотропної поверхні у термінах (25) [19]:

$$P(e_1) = (2p)^{-3} \Delta^{-1/2} \exp\left(-\frac{\Delta_2}{2\Delta_{12}} e_1^2\right) \times \iiint_V (e_4 e_6 - e_5^2) \exp\left[\frac{1}{\Delta_{12}} (\Delta_3 e_1 e_4 - \Delta_4 e_1 e_5 + \Delta_5 e_1 e_6 - \frac{\Delta_6}{2} e_4^2 + \Delta_7 e_4 e_5 - \Delta_8 e_4 e_6 - \frac{\Delta_9}{2} e_5^2 + \Delta_{10} e_5 e_6 - \frac{\Delta_{11}}{2} e_6^2)\right] de_4 de_5 de_6, \quad (36)$$

де простір інтегрування V визначається нерівностями:

$$\begin{cases} e_4 < 0; \\ e_6 < 0; \\ e_4 e_6 - e_5^2 \geq 0 \end{cases} \quad (37)$$

і уявляє собою конус, який повернутий у просторі відносно осей e_4, e_5, e_6 . Вводячи змінні t, r, j, e'_1 , які пов'язані з e_4, e_5, e_6, e_1 рівностями:

$$\begin{cases} e_4 = (t + r \cos j) m_{22}^{1/2}; \\ e_5 = (r \sin j) m_{22}^{1/2}; \\ e_6 = (t - r \cos j) m_{22}^{1/2}; \\ e'_1 = \frac{e_1}{\sqrt{m_{00}}} = \frac{e_1}{S} = \frac{z - \bar{z}_0}{S} = \frac{z - 0}{S} = \frac{z}{S}, \end{cases} \quad (38)$$

де e'_1 – зведена (приведена, безрозмірна) висота;

σ – середнє квадратичне значення висоти нерівностей;

$\bar{z}_0 = 0$ – середня на середній площині (x, y) .

Приведемо рівняння конусу до канонічного вигляду. При цьому простір $V(e_4, e_5, e_6)$ в термінах $V_1(j, t, r)$ буде визначатися нерівностями:

$$\begin{cases} 0 \leq j \leq 2p; \\ t < 0; \\ 0 \leq r \leq -t, \end{cases} \quad (39)$$

а $de_4 de_5 de_6 = 2rm_{22}^{3/2} dt dr dj$.

За допомогою якобіанів переходу зручно здійснювати перетворення частинних похідних до інших змінних. Якобіан є функціональний визначник $|a_{ik}|_1^n$ з елементами $a_{ik} = \partial y_i / \partial x_k$, де $y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(1 \leq i \leq n)$ – функції, що мають неперервні частинні похідні в певному просторі, який має позначення [66]:

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}. \quad (40)$$

Наприклад, якобіаном $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ називають [63, 66]

детермінант [63]:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad (41)$$

який має такі наявні властивості:

$$\frac{\partial(v, u)}{\partial(x, y)} = -\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}; \quad (42)$$

$$\frac{\partial(u, y)}{\partial(x, y)} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_y. \quad (43)$$

Такі співвідношення вірні, якщо:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(t, s)} \cdot \frac{\partial(t, s)}{\partial(x, y)}; \quad (44)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right)}{\partial(x, y)} - \frac{\partial\left(u, \frac{\partial v}{\partial t}\right)}{\partial(x, y)}; \quad (45)$$

Тут якобіан переходу має вигляд у термінах (t, ρ, φ) [19]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(e_4 e_5 e_6)}{\partial(t, r, j)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial e_4}{\partial t} & \frac{\partial e_4}{\partial r} & \frac{\partial e_4}{\partial j} \\ \frac{\partial e_5}{\partial t} & \frac{\partial e_5}{\partial r} & \frac{\partial e_5}{\partial j} \\ \frac{\partial e_6}{\partial t} & \frac{\partial e_6}{\partial r} & \frac{\partial e_6}{\partial j} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} m_{22}^{1/2} & m_{22}^{1/2} \cos j & -m_{22}^{1/2} r \sin j \\ 0 & m_{22}^{1/2} \sin j & m_{22}^{1/2} r \cos j \\ m_{22}^{1/2} & -m_{22}^{1/2} \cos j & m_{22}^{1/2} r \sin j \end{vmatrix} = \\ &= 2 r m_{22}^{3/2}. \end{aligned} \quad (46)$$

15. Ізотропна поверхня. За [9] у точці (x, y) , яка належить елементу площі $dF = dx dy$, поверхня має вершину (точку максимуму поверхні), якщо виконуються умови [9]:

$$\left. \begin{aligned} e_2 = e_3 = 0; \\ e_4 < 0; e_6 < 0; (e_4 e_6 - e_5^2) \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Ймовірність того, що в точці (x, y) поверхні значення змінних e_i знаходиться в межах $(e_i; e_i + de_i)$, дорівнює [9]:

$$p(e_1, \dots, e_6) de_1 \dots de_6, \quad (48)$$

де приріст de_2 і de_3 в ділянці dF визначається за [9] так:

$$de_2 de_3 = \left| \frac{\partial(e_2, e_3)}{\partial(x, y)} \right| dF. \quad (49)$$

Тут якобіан переходу має вигляд у термінах (x, y) [9]:

$$\frac{\partial(e_2, e_3)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial e_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial e_3}{\partial y} - \frac{\partial e_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial e_3}{\partial x} = e_4 e_6 - e_5^2. \quad (50)$$

Нехай $P(e_1)$ є щільність висот вершин ізотропної шорсткої поверхні, тоді ймовірність того, що в межах площі dF зустрінеться вершина з висотою в межах $(e_1; e_1 + de_1)$ дорівнює [9]:

$$P(e_1) de_1 dF = de_1 \iiint_V p(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6) de_2 de_3 de_4 de_5 de_6, \quad (51)$$

де простір інтегрування V визначається нерівностями:

$$e_4 < 0; e_6 < 0; (e_4 e_6 - e_5^2) \geq 0. \quad (52)$$

Підставивши (49), (50), (31) в (51), отримаємо вираз для щільності висот вершин у термінах (27) [9]:

$$\begin{aligned} P(e_1) &= (2p)^{-3} \Delta^{-1/2} \exp\left(-\frac{m_4 e_1^2}{\Delta_1}\right) \times \\ &\times \iiint_V |e_4 e_6 - e_5^2| \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\frac{9\Delta_2}{4m_4 \Delta_1} (e_4^2 + e_6^2) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{3}{m_4} e_5^2 + \frac{3m_2}{\Delta_1} e_1 (e_4 + e_6) - \frac{3\Delta_3}{2m_4 \Delta_1} e_4 e_6 \right]\right\} de_4 de_5 de_6. \end{aligned} \quad (53)$$

16. Введемо позначення

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{m_{22}(\Delta_6 + 2\Delta_8 + \Delta_{11})}{2\Delta_{12}}; \quad A_2 = -\frac{m_{22}(\Delta_6 - \Delta_{11})}{\Delta_{12}}; \\ A_3 &= \frac{m_{22}(\Delta_7 + \Delta_{10})}{\Delta_{12}}; \quad A_4 = -\frac{m_{22}(\Delta_6 - 2\Delta_8 + \Delta_{11})}{2\Delta_{12}}; \\ A_5 &= \frac{m_{22}(\Delta_7 - \Delta_{10})}{\Delta_{12}}; \quad A_6 = -\frac{\Delta_9 m_{22}}{2\Delta_{12}}; \\ A_7 &= \frac{(\Delta_3 + \Delta_5)(m_{00} m_{22})^{1/2}}{\Delta_{12}}; \\ A_8 &= \frac{(\Delta_3 - \Delta_5)(m_{00} m_{22})^{1/2}}{\Delta_{12}}; \quad A_9 = -\frac{\Delta_4 (m_{00} m_{22})^{1/2}}{\Delta_{12}}. \end{aligned} \quad (54)$$

Тоді, використовуючи [9], вираз (36) для щільності висот вершин анізотропної поверхні запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} P(e'_1) &= \frac{1}{4} p^{-3} \Delta^{-1/2} m_{00}^{1/2} m_{22}^{5/2} \times \\ &\times \exp\left[-\frac{\Delta_2 m_{00}}{2\Delta_{12}} (e'_1)^2\right] \iiint_{V_1} (t^2 - r^2) r \times \\ &\times \exp(A_1 t^2 + A_2 t r \cos j + A_3 t r \sin j + \\ &+ A_5 r^2 \cos j \sin j + A_6 r^2 \sin^2 j + \\ &+ A_4 r^2 \cos^2 j + A_7 e'_1 t + A_8 e'_1 r \cos j + \\ &+ A_9 e'_1 r \sin j) dt dr dj. \end{aligned} \quad (55)$$

Вираз для щільності ймовірностей розподілу висот вершин анізотропної поверхні знайдемо [9] шляхом ділення щільності висот вершин $P(e'_1)$ (55) на щільність вершин D , вираз для якої отримано в [10]:

$$p(e'_1) = P(e'_1)/D; \quad (56)$$

$$D = \frac{1}{2} p^{-2} (L_2 L_3)^{1/2} \Delta_1^{-1/2} [(1 - L_1/L_2)^{1/2} \times \\ \times E_1(K) - (1 - L_1/L_2)^{-1/2} U_1(K)], \quad (57)$$

де $U_1(K)$, $E_1(K)$ – повні еліптичні інтеграли Лежандра 1-го і 2-го роду [63]:

$$U_1(K) = \int_0^{p/2} \frac{dj}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 j}}; \quad (58)$$

$$E_1(K) = \int_0^{p/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 j} \, dj; \quad (59)$$

$$K = \left(\frac{1 - L_2/L_3}{1 - L_2/L_1} \right)^{1/2}; \quad (60)$$

$L_1 \geq L_2 \geq L_3$ – корені рівняння;

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{1}{2} m_{22} - L \right) & -m_{31} & \frac{1}{2} m_{40} \\ \frac{1}{2} m_{13} & -(m_{22} + L) & \frac{1}{2} m_{31} \\ \frac{1}{2} m_{04} & -m_{13} & \left(\frac{1}{2} m_{40} - L \right) \end{vmatrix} = 0, \quad (61)$$

або $4L^3 - 3HL - \Delta_2 = 0$;

$$H = \frac{1}{3} (m_{40} m_{04} - 4m_{31} m_{13} + 3m_{22}^2) = \frac{M_5}{3}, \quad (62)$$

де $M_5 = m_{40} m_{04} - 4m_{31} m_{13} + 3m_{22}^2$. (63)

17. Для ізотропної поверхні щільність вершин дорівнює [9, 14]:

$$D = \frac{1}{8p\sqrt{3}} \left(\frac{M_4}{M_2} \right) = \frac{1}{6p\sqrt{3}} \left(\frac{m_4}{m_2} \right), \quad (64)$$

де $M_2 = m_{20} + m_{02}$; (65)

• нульового порядку: $M_0 = m_{00}$; (69)

• другого порядку $\begin{cases} M_2 = (m_{02} + m_{20}); \\ M_3 = (m_{20} m_{02} - m_{11}^2); \end{cases}$ (70)

$\begin{cases} M_4 = (m_{40} + 2m_{22} + m_{04}); \\ M_5 = (m_{40} m_{04} - 4m_{13} m_{31} + 3m_{22}^2); \end{cases}$ (71)

• четвертого порядку $\begin{cases} M_6 = (m_{40} + m_{22})(m_{22} + m_{04}) - (m_{31} + m_{13})^2; \\ M_7 = m_{40}(m_{22} m_{04} - m_{13}^2) - m_{31}(m_{31} m_{04} - m_{13} m_{22}) + m_{22}(m_{31} m_{13} - m_{22}^2). \end{cases}$ (72)

$\begin{cases} M_6 = (m_{40} + m_{22})(m_{22} + m_{04}) - (m_{31} + m_{13})^2; \\ M_7 = m_{40}(m_{22} m_{04} - m_{13}^2) - m_{31}(m_{31} m_{04} - m_{13} m_{22}) + m_{22}(m_{31} m_{13} - m_{22}^2). \end{cases}$ (73)

$\begin{cases} M_6 = (m_{40} + m_{22})(m_{22} + m_{04}) - (m_{31} + m_{13})^2; \\ M_7 = m_{40}(m_{22} m_{04} - m_{13}^2) - m_{31}(m_{31} m_{04} - m_{13} m_{22}) + m_{22}(m_{31} m_{13} - m_{22}^2). \end{cases}$ (74)

$\begin{cases} M_6 = (m_{40} + m_{22})(m_{22} + m_{04}) - (m_{31} + m_{13})^2; \\ M_7 = m_{40}(m_{22} m_{04} - m_{13}^2) - m_{31}(m_{31} m_{04} - m_{13} m_{22}) + m_{22}(m_{31} m_{13} - m_{22}^2). \end{cases}$ (75)

21. Введемо в науковий обіг 8 параметрів широкосмужності спектру анізотропної поверхні [3]:

$$a_1 = \frac{M_0 M_4}{M_2^2} = \frac{m_{00}(m_{40} + 2m_{22} + m_{04})}{(m_{02} + m_{20})^2}; \quad (76)$$

$$a_2 = \frac{M_0 M_5}{M_2^2} = \frac{m_{00}(m_{40} m_{04} - 4m_{13} m_{31} + 3m_{22}^2)}{(m_{02} + m_{20})^2}; \quad (77)$$

$$a_3 = \frac{M_0 M_6}{M_2^2} = \frac{m_{00} [(m_{40} + m_{22})(m_{22} + m_{04}) - (m_{31} + m_{13})^2]}{(m_{02} + m_{20})^2}; \quad (78)$$

$$a_4 = \frac{M_0 M_7}{M_2^2} = \frac{m_{00} [m_{40}(m_{22} m_{04} - m_{13}^2) - m_{31}(m_{31} m_{04} - m_{13} m_{22}) + m_{22}(m_{31} m_{13} - m_{22}^2)]}{(m_{02} + m_{20})^2}; \quad (79)$$

$$M_4 = m_{40} + 2m_{22} + m_{04}. \quad (66)$$

18. Використовуючи (56) після перетворень (55), за процедурою [9] отримуємо вираз для щільності ймовірностей розподілу висот вершин анізотропної поверхні [19]:

$$p(e'_1) = \frac{1}{4} D^{-1} p^{-3} \Delta^{-1/2} m_{00}^{1/2} m_{22}^{5/2} \times \\ \times \exp \left[-\frac{\Delta_2 m_{00}}{2\Delta_{12}} (e'_1)^2 \right] \int_{-\infty}^0 \exp(A_1 t^2 + A_7 e'_1 t) dt \times \\ \times \int_0^{-t} (t^2 - r^2) r dr \int_0^{2p} \exp[A_4 r^2 \cos^2 j + \\ + A_5 r^2 \cos j \sin j + A_6 r^2 \sin^2 j + \\ + (A_2 t + A_8 e'_1) r \cos j + (A_3 t + A_9 e'_1) r \sin j] dj. \quad (67)$$

19. Функція розподілу ймовірностей висот вершин анізотропної поверхні:

$$f(e'_1) = \int_{-\infty}^{e'_1} p(e'_1) de'_1. \quad (68)$$

Функція розподілу ймовірностей висот вершин визначає частку тих вершин, у яких величини висот не перевищують значення e_1 . Розрахунки за (68) показують, що при $\alpha \rightarrow 1,5$ зменшується відносне число тих вершин, висота яких ($e'_1 < 3$) не перевищує рівень $+3\sqrt{m_{00}}$.

20. Лонгет-Гігінс [10] показав, що для опису анізотропної поверхні необхідно використати 9 спектральних моментів: \mathbf{m}_{00} , \mathbf{m}_{20} , \mathbf{m}_{02} , \mathbf{m}_{11} , \mathbf{m}_{13} , \mathbf{m}_{31} , \mathbf{m}_{22} , \mathbf{m}_{40} , \mathbf{m}_{04} , але при $i+j \leq 4$ існують лише 7 їх інваріантних комбінацій, які не залежать від орієнтації системи координат:

Щільність ймовірностей розподілу висот вершин шорстких поверхонь...

$$a_5 = \frac{M_0 M_4}{M_3^2} = \frac{m_{00}(m_{40} + 2m_{22} + m_{04})}{(m_{20}m_{02} - m_{11}^2)^2}; \quad (80)$$

$$a_6 = \frac{M_0 M_5}{M_3^2} = \frac{m_{00}(m_{40}m_{04} - 4m_{13}m_{31} + 3m_{22}^2)}{(m_{20}m_{02} - m_{11}^2)^2}; \quad (81)$$

$$a_7 = \frac{M_0 M_6}{M_3^2} = \frac{m_{00}[(m_{40} + m_{22})(m_{22} + m_{04}) - (m_{31} + m_{13})^2]}{(m_{20}m_{02} - m_{11}^2)^2}; \quad (82)$$

$$a_8 = \frac{M_0 M_7}{M_3^2} = \frac{m_{00}[m_{40}(m_{22}m_{04} - m_{13}^2) - m_{31}(m_{31}m_{04} - m_{13}m_{22}) + m_{22}(m_{31}m_{13} - m_{22}^2)]}{(m_{20}m_{02} - m_{11}^2)^2}. \quad (83)$$

22. Розглядаючи ізотропну поверхню як поодинокий випадок анізотропної поверхні, коли АКФ і моменти СЩ не залежать від напрямку, на підставі (8), будемо мати співвідношення:

$$\begin{aligned} m_{00} &= m_0; \quad m_{20} = m_{02} = m_2; \\ m_{11} &= m_{13} = m_{31} = 0; \\ 3m_{22} &= m_{40} = m_{04} = m_4. \end{aligned} \quad (84)$$

Виходячи з (55) і з урахуванням (64) для D ізотропної поверхні [9, 14], вираз (67) щільності ймовірностей розподілу висот вершин ізотропної поверхні набуде такого вигляду [19]:

$$\begin{aligned} p(e'_1) &= (2p)^{-1} (3C_1)^{1/2} \exp[-C_1(e'_1)^2] \times \\ &\times \int_{-\infty}^0 \exp\left[-\frac{1}{2}(C_1 t^2 + C_2 e'_1 t)\right] dt \times \\ &\times \int_0^{e'_1} (t^2 - r^2) r dr \int_0^{2p} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr, \end{aligned} \quad (85)$$

$$\text{де } C_1 = a/(2a-3); \quad a = m_0 m_4 / m_2^2; \quad C_2 = C_1 \sqrt{\frac{12}{a}}. \quad (86)$$

Після інтегрування (85) отримуємо вираз для щільності ймовірностей розподілу висот вершин ізотропної поверхні [9, 19]:

$$p(e'_1) = \frac{\sqrt{3C_1}}{2p} \left[\left(\frac{1}{C_1} - 2 \right) J_0 + e'_1 \sqrt{\frac{3}{a}} J_1 + 2J_2 \right], \quad (87)$$

де інтегралі J_0, J_1, J_2 [9]:

$$\begin{aligned} J_0 &= \sqrt{\frac{p}{2C_1}} \exp\left[-\frac{(e'_1)^2}{2}\right] (1 + \operatorname{erfb}); \\ J_1 &= \frac{1}{C_1} \left\{ \exp[-C_1(e'_1)^2] + b\sqrt{p} \exp\left[-\frac{(e'_1)^2}{2}\right] (1 + \operatorname{erfb}) \right\}; \end{aligned}$$

$$J_2 = \sqrt{\frac{p}{2(1+C_1)}} \exp\left[-\frac{a(e'_1)^2}{2(a-1)}\right] (1 + \operatorname{erfg});$$

$$b = e'_1 \sqrt{\frac{3}{2(2a-3)}}; \quad g = e'_1 \sqrt{\frac{a}{2(a-1)(2a-3)}},$$

а інтегралі ймовірностей похибок [63]:

$$\begin{aligned} \operatorname{erf}(x) &= \frac{2}{\sqrt{p}} \int_0^x \exp(-t^2) dt \approx \frac{2}{\sqrt{p}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2!} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{x^7}{7} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{x^9}{9} \pm \dots \right); \\ \operatorname{erf}(\infty) &= 1; \end{aligned}$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{p}} \int_x^{\infty} \exp(-t^2) dt.$$

Після перетворень (87) отримуємо вираз для щільності ймовірностей розподілу висот вершин ізотропної поверхні [19]:

$$\begin{aligned} p(e'_1) &= \frac{\sqrt{3}}{2p} \left\{ \exp[-C_1(e'_1)^2] \sqrt{\frac{3(2a-3)}{a^2}} e'_1 + \right. \\ &\quad \left. + \exp\left[-\frac{(e'_1)^2}{2}\right] (1 + \operatorname{erfb}) \frac{3\sqrt{2p}}{2a} [(e'_1)^2 - 1] + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{2p} \exp\left[-\frac{a(e'_1)^2}{2(a-1)}\right] (1 + \operatorname{erfg}) \sqrt{\frac{a}{3(a-1)}} \right\}, \end{aligned} \quad (88)$$

що співпадає з [9].

На рис. 1 приведена залежність щільності ймовірностей розподілу висот вершин $p(e'_1)$ шорсткої ізотропної поверхні в залежності від безрозмірної (зведеної) висоти e'_1 та параметра широкосмужності спектру a , який змінюється в межах 1,5...∞ [9].

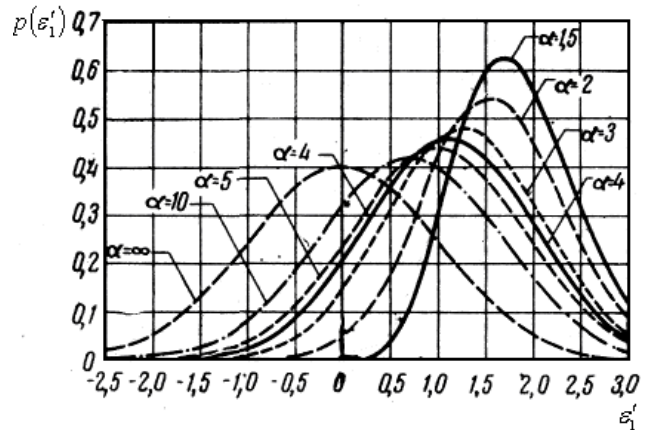


Рис. 1. Щільність ймовірностей розподілу висот вершин ізотропної шорсткої поверхні [9].

Як видно з рис. 1, для $\alpha \rightarrow \infty$ спостерігається гауссовський розподіл щільності ймовірностей висот вершин при $e'_1 = -3,5 \dots +3,5$, при цьому $0 \leq p(e'_1) \leq 0,4$, а при $\alpha=1,5$ маємо релеєвський розподіл в межах $0 \leq e'_1 \leq 3,5$, при цьому $0 \leq p(e'_1) \leq 0,627$.

23. Функція розподілу ймовірностей висот вершин ізотропної поверхні [9], яка визначає частку тих вершин, у яких величини висот не перевищують значення e'_1 :

$$f(e'_1) = \int_{-\infty}^{e'_1} p(e'_1) de'_1, \quad 0 \leq f(e'_1) \leq 1, \quad (89)$$

при $0 \leq e'_1 < 3,5$ та $1,5 \leq \alpha < \infty$.

На рис. 2 приведена залежність функції розподілу висот вершин $f(e'_1)$ шорсткої ізотропної поверхні [9].

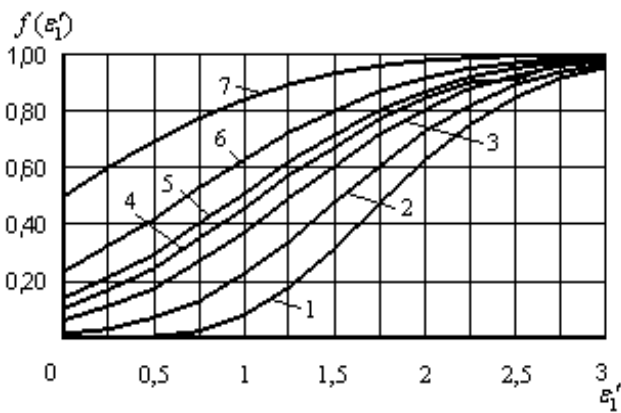


Рис. 2. Функція розподілу $f(e'_1)$ висот вершин ізотропної поверхні від безрозмірної зведеної висоти вершини e'_1 для параметра широкосмужності спектру α : 1 – $\alpha=1,5$; 2 – $\alpha=2$; 3 – $\alpha=3$; 4 – $\alpha=4$; 5 – $\alpha=5$; 6 – $\alpha=10$; 7 – $\alpha \rightarrow \infty$.

Як видно з рис. 2, при $\alpha \rightarrow 1,5$ відбувається зменшення відносного числа тих вершин, висоти яких не перевищують рівень $+3\sigma$ ($e'_1 < 3$) [9].

24. За [9] для опису ізотропних шорстких поверхонь необхідно використати три спектральні моменти (\mathbf{m}_0 , \mathbf{m}_2 і \mathbf{m}_4) і один параметр широкосмужності спектра $a = \frac{(m_0 m_4)}{m_2^2}$, який не залежить від орієнтації системи координат на поверхні.

Згідно [9], параметр широкосмужності СЦ α для ізотропної випадкової поверхні знаходиться в границях $1,5 \leq \alpha < \infty$. Для граничних значень α щільність ймовірностей розподілу висот вершин ізотропної поверхні дорівнює [9]:

- при $\alpha \rightarrow 1,5$ ($\beta \rightarrow \infty$; $\gamma \rightarrow \infty$; $C_1 \rightarrow \infty$)

$$p(e'_1) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2p}} \exp\left[-\frac{(e'_1)^2}{2}\right] \left\{ (e'_1)^2 - 1 + \exp[-(e'_1)^2] \right\}, & e'_1 \geq 0 \\ 0, & e'_1 < 0 \end{cases}, \quad (90)$$

тобто розподіл (88) близький до релеєвського;

- при $\alpha \rightarrow \infty$ ($\beta \rightarrow 0$; $\gamma \rightarrow 0$; $C_1 \rightarrow 1/2$)

$$p(e'_1) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \exp\left[-\frac{(e'_1)^2}{2}\right], \quad (91)$$

тобто розподіл (88) підпорядкований гауссовському.

У загальному випадку щільність ймовірностей висот вершин залежить від двох параметрів: a і e'_1 , а в граничних випадках – від одного параметра e'_1 .

За (10) і (11), з урахуванням $M_{ij} = M_{11} = (N_{11})^{-1} = 1/(\bar{e}_1)^2 = m_{00}^{-1} = s^{-2}$ і $\Delta = s^2$, знаходимо щільність ймовірностей висот $e_1 = z$ поверхні:

$$p(e_1) = (2ps^2)^{-1/2} \exp\left[-\frac{e_1^2}{2s^2}\right]. \quad (92)$$

Таким чином, розподіл висот поверхні підпорядкований гауссовському закону.

За (64) щільність вершин (число вершин, що припадає на одиницю ізотропної поверхні), показує, якщо СЦ поверхні уявляє собою «плоску» функцію навіть до достатньо великих хвильових чисел (малих довжин хвиль), то величина D має дуже велике значення [9]. Це пов'язано з тим, що наявність короткохвильових компонентів в спектрі приводить до з'яви «мільких» нерівностей з малими довжинами хвиль та малими висотами вершин, які зосереджені біля високих вершин з великою довжиною хвилі [9]. Це при аналізі реальних шорстких поверхонь вимагає відфільтровки «мільких» нерівностей, при цьому \mathbf{m}_4 зменшується швидше, ніж \mathbf{m}_2 і, внаслідок чого, зменшується і D .

Висновки

1. Використовуючи центральну граничну теорему теорії ймовірностей для моделі шорсткої поверхні твердого тіла, змодельованого випадковим полем, знайдено вираз для щільності ймовірностей розподілу висот вершин анізотропної поверхні, з якого витікає вираз для ізотропної поверхні.

2. Виходячи з висновку Лонгет-Гітінса про використання 9 спектральних моментів (\mathbf{m}_{00} – нульового порядку, що пов'язаний з висотним параметром; \mathbf{m}_{20} , \mathbf{m}_{02} , \mathbf{m}_{11} – другого порядку, що пов'язані з градієнтом поверхні; \mathbf{m}_{13} , \mathbf{m}_{31} , \mathbf{m}_{22} , \mathbf{m}_{40} , \mathbf{m}_{04} – четвертого порядку, що пов'язані з середньою кривиною поверхні у вершині нерівностей) та про існування 7 їх інваріантних комбінацій для опису анізотропної поверхні, в науковий обіг вперше введено 8 параметрів широкосмужності спектру анізотропної поверхні.

3. Із аналізу виразів, що отримані для анізотропної поверхні стверджено, що щільність ймовірностей розподілу висот вершин ізотропної поверхні залежить від зведеного висотного параметра e'_1 та одного параметра широкосмужності спектру a .

4. Для значень параметра широкосмужності спектру $\alpha=1,5 \dots \infty$ приведений графік залежності щільності ймовірностей розподілу висот вершин та функції розподілу висот вершин від безрозмірної

зведеної висоти.

5. Отримані теоретичні дані з математичного опису анізотропних та ізотропних шорстких поверхонь твердих тіл за допомогою моделі випадкового поля відносно щільності ймовірностей розподілу висот вершин дозволяють використати їх для аналізу експериментальних результатів, що характеризують шорсткість реальних поверхонь та контактних явищ і

фізико-хімічних процесів, які мають місце на них.

Сіренко Г.О. – професор, доктор технічних наук, завідувач кафедри теоретичної і прикладної хімії;
Семенюк М.Ф. – професор, доктор технічних наук, професор кафедри машинознавства;
Солтис Л.М. – аспірант кафедри теоретичної і прикладної хімії.

- [1] М.И. Ядренко. *Спектральная теория случайных полей*. Вища шк., Киев. 208 с. (1980).
- [2] I.I. Argatov. The theory of elastic nonsaturated contact between rough surfaces // *Friction and wear*, **25** (1), pp. 27-34 (2003).
- [3] Г.О. Сіренко, Л.М. Солтис. Моделі нанометричної та мікрометричної шорсткості поверхні твердих тіл (Огляд) // *Фізика і хімія твердого тіла*, **11** (2), сс. 423-446 (2010).
- [4] Я.А. Рудзит. *Микрогеометрия и контактное взаимодействие поверхностей*. Зинатне, Рига. 210 с. (1975).
- [5] Г.М. Харач, Л.И. Экслер. Об определении характеристик микрогеометрии поверхности со случайной шероховатостью при расчетах трения и износа // *Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа*. Наука, Москва. с. 169 (1971).
- [6] M.G. Cooper, V.B. Mikis, M.M. Yovanovich. Thermal contact conductance // *International Journal of heat and mass transfer*, (12), pp. 279-300 (1969).
- [7] D.J. Whitehouse, J.F. Archard. The Properties of Random Surfaces of Significance in the contact // *Proceedings of the Royal Soc.*, **316** (Ser. A), pp. 97-121 (1970).
- [8] D.J. Whitehouse, J.F. Archard. The properties of random surfaces in contact // *Surface Mechanics, Proceedings of the ASME Annual winter meeting*. Los Angeles, Calif., November, pp. 16-20 (1969).
- [9] П.Р. Найяк. Применение модели случайного поля для исследования шероховатых поверхностей // *Проблемы трения и смазки*, **93** (Ser. F, 3), сс. 85-95 (1971).
- [10] М.С. Лонге-Хиггинс. Статистическая геометрия случайных поверхностей // *Гидродинамическая неустойчивость*. Мир, Москва. сс. 124-167 (1964).
- [11] D.E. Gartwright, M.S. Longuet-Higgins. The statistical distribution of the maxima of a random function // *Proceedings of the Royal Soc. London*, **237** (Ser. A), pp. 212-232 (1956).
- [12] M.S. Longuet-Higgins. On the statistical distribution of the highs of sea waves // *J. Marine Research*, **11** (3), p. 245 (1952).
- [13] M.S. Longuet-Higgins. Statistical Properties of a moving waveform // *Proc. Cambridge Philos. Soc. London*, (52), p. 234 (1956).
- [14] M.S. Longuet-Higgins. Statistical Properties of an isotropic random surface // *Philos. Trans. of the Royal Soc. London*, **250** (Ser. A), pp. 157-174 (1957).
- [15] M.S. Longuet-Higgins. The Statistical Analysis of a Random Moving Surface // *Philos. Trans. of the Royal Soc. London*, **249** (Ser. A), pp. 321-387 (1957).
- [16] M.S. Longuet-Higgins. The Statistical distribution of the curvature of a random Gaussian surface // *Proc. Cambridge Philos. Soc. London*, (54), p. 439 (1958).
- [17] С.Б. Айнбиндер, Э.Л. Тюнина. *Введение в теорию полимеров*. Зинатне, Рига. 224 с. (1978).
- [18] В.С. Комбалов. *Оценка триботехнических свойств контактирующих поверхностей*. Наука, Москва. 136 с. (1983).
- [19] Н.Ф. Семенюк, Г.А. Сіренко. Описание топографии анизотропных шероховатых поверхностей трения с помощью модели случайного поля: 1. Распределение высот вершин, средняя кривизна в вершинах, градиент поверхности // *Трение и износ*, **1** (3), сс. 465-471 (1980).
- [20] Н.Ф. Семенюк, Г.А. Сіренко. Описание топографии анизотропных шероховатых поверхностей трения с помощью модели случайного поля: 2. Полная кривизна, главные кривизны и отношение главных кривизн в вершинах микронеровностей, удельная площадь гауссовской поверхности и удельный объем зазора // *Трение и износ*, **1** (5), сс. 815-823 (1980).
- [21] Н.Ф. Семенюк, Г.А. Сіренко. Описание топографии анизотропных шероховатых поверхностей трения с помощью модели случайного поля: 3. Фактическая площадь контакта, коэффициент трения, термическое сопротивление, адгезионное взаимодействие с учетом деформации в зоне контакта // *Трение и износ*, **1** (6), сс. 1010-1019 (1980).
- [22] Г.О. Сіренко, Л.М. Солтис. Антифрикційні властивості карбопластика під час тертя по шорсткій ізотропній поверхні сталі 45 без мащення // *Матеріали П'ятої Міжнародної науково-технічної web-конференції «Композиційні матеріали»* - Київ, травень 2010 р., Київ, сс. 102-103 (2010).
- [23] Г.О. Сіренко, Л.М. Солтис, Л.В. Базюк. Утворення та властивості поверхневих плівок під час фрикційного контакту пари полімерний композит – метал // *Матеріали XII Міжнародної конференції «Фізика і технологія тонких плівок та наносистем»*. – 18-23 травня 2009 року, м. Івано-Франківськ, Україна, Івано-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т ім. В.Стефаніка, **2**, сс. 261-264 (2009).

- [24] Г.О. Сіренко. Вплив анізотропної шорсткості на контактні явища // Тези допов. Звітної наукової конференції Прикарп. ун-ту ім. Василя Стефаника за 2002 р. – Серія “Хімія”. – 15-23.04.2003р., Івано-Франківськ: Прикарп. ун-т ім. В. Стефаника, сс. 19 – 21 (2003).
- [25] Г.О. Сіренко, М.Ф. Семенюк. Залежність зношування карбопластиків від шорсткості спряжених поверхонь, які змодельовані анізотропним випадковим полем // Аннот. допов. І-го Міжнарод. симпозіуму “Фізико-хімічна механіка композиційних матеріалів”. – Івано-Франківськ, 15-19.02.1993, Івано-Франк.: Прикарп. ун-т, сс. 53 – 54 (1993).
- [26] G. Sirenko, M. Semeniyuk. Surface Phenomena on Rough Mating Surfaces Modelled by an Anisotropic Random Fields // Abstracts, information and participants Ukrainian-French Symposium “Condensed Matter: Science and Industry”. – Lviv, 20-27 February 1993. IPhCS NANU, Lviv. p. 60 (1993).
- [27] Г.А. Сиренко, Н.Ф. Семенюк. Методика определения моментов спектральной плотности шероховатых поверхностей уплотнительной пары // Тез. докл. 3-го Всесоюз. совещания по уплотнительной технике, ВНИИкомпрессормаш, Сумы, сс. 46-47 (1982).
- [28] Н.Ф. Семенюк, Г.А. Сиренко. Топография и контактные явления анизотропных шероховатых поверхностей трения // Тез. докл. Всесоюз. науч.-техн. конфер. «Трибоника и антифрикционное материаловедение». – Новочеркасск. 27-29.05.1980. Изд-во Новочеркас. политех. ин-та, Новочеркасск, сс. 22-23 (1980).
- [29] Г.А. Сиренко. Осложнение контактных явлений поверхности уплотнительных материалов анизотропной микрошероховатости // Тез. докл. 3-го Всесоюз. совещания по уплотнительной технике. ВНИИкомпрессормаш, Сумы, сс. 44-45 (1982).
- [30] Г.О. Сіренко. Дослідження залежності інтенсивності зношування ХМА – карбопластиків від моментів спектральної густини спряженої шорсткої поверхні // Наук. зб: «Всеукр.наук. та проф. тов-ва ім. М.Міхновського», Київ, (10), сс. 24-34 (1998).
- [31] Г.О. Сіренко. Дослідження топографії спряжених поверхонь ХМА – карбопластик–сталь // Наук.зб: «Всеукр.наук. та проф. тов-ва ім. М.Міхновського», Київ, (10), сс. 34-45 (1998).
- [32] Г. Сіренко, М. Семенюк. Адгезія з деформацією в зоні контакту анізотропних шорстких поверхонь, змодельованих випадковим полем // Вісник Прикарп. ун-ту ім. В. Стефаника. Сер. Хімія, (I), сс. 66-85 (2001).
- [33] Г. Сіренко, М. Кедик. Вплив анізотропної шорсткості поверхонь, змодельованих випадковим полем, на контактні явища // Вісник Прикарп. ун-ту ім. В. Стефаника. Сер. Хімія, (IV), сс. 50-53 (2004).
- [34] Г.О. Сіренко, Л.М. Солтис. Трибоповерхневі властивості карбопластика під час тертя по шорсткій ізотропній поверхні сталі 45 без мащення // Вісник Прикарп. нац. ун-ту ім. В. Стефаника. Сер. Хімія, (VII), сс. 104-106 (2009).
- [35] Г.О. Сіренко, Л.М. Солтис. Трибоповерхневі властивості карбопластика під час тертя по шорсткій ізотропній металевій поверхні в дистильованій воді // Вісник Прикарп. нац. ун-ту ім. В. Стефаника. Сер. Хімія, (VIII), сс. 99-101 (2009).
- [36] Г.О. Сіренко, О.В. Кузишин, Л.Я. Мідак. Оцінка розподілу мікронерівностей на поверхні твердого тіла // Тези доповід. Четвертої міжнародної науково-практичної конференції «Розвиток наукових досліджень 2008». – м. Полтава, 24-26 листопада 2008 р., ІнтерГрафіка, Полтава, 7, сс. 38-41 (2008).
- [37] О.В. Романишина. Исследования предварительного смещения упругого контакта шероховатых изотропных поверхностей: Дис. ... канд. техн. наук: 05.02.04, Хмельницький, 178 с. (1998).
- [38] О.В. Романишина, Н.Ф. Семенюк. Предварительное смещение единичного выступа при различных режимах нагружения // Проблемы трибологии, (2), сс. 35-51 (1997).
- [39] Н.Ф. Семенюк, Н.К. Бачинская. Слияние пятен контакта при нагружении шероховатых, сильно анизотропных поверхностей // Проблемы трибологии, (3), сс. 103-107 (1998).
- [40] Н.Ф. Семенюк. Исследования топографии поверхностей методом случайного поля и разработка расчетных методов оценки фактической площади контакта при трении твердых тел: Дис. ... канд. техн. наук: 05.02.04. – Якутск: Ин-т физико-техн. проблем Севера СО ЯФ АН СССР. 149 с. (1983).
- [41] Н.Ф. Семенюк, Г.С. Калда, Е.С. Соколан. Использование метода случайных полей при расчете параметров шероховатости, влияющих на тепловые процессы в трущихся телах // Проблемы трибологии, (1), (1996).
- [42] Н.Ф. Семенюк, Т.Ф. Калмыкова. Фактическая площадь упругого контакта анизотропной шероховатой поверхности с гладкой // Трение и износ, 4 (3), сс. 467 – 475 (1983).
- [43] Н.Ф. Семенюк, О.В. Романишина. Предварительное смещение шероховатых изотропных поверхностей. I. // Проблемы трибологии, (4), сс. 90 – 101 (1997).
- [44] Н.Ф. Семенюк, О.В. Романишина. Рассеяние энергии на единичном контакте в режиме предварительного смещения // Проблемы трибологии, (2), сс. 52–56 (1997).
- [45] Н.Ф. Семенюк, К.С. Соколан. Кривизна в вершинах выступів поверхонь тертя поршневих ущільнень // Проблеми трибології, (2), (2000).
- [46] Н.Ф. Семенюк, Е.С. Соколан. Основное уравнение контактирования элементов бесшмазочных поршневых уплотнений // Проблемы трибологии, (1), (2002).
- [47] Н.Ф. Семенюк. Средние значения полной и средней кривизны в вершинах, высоты неровностей анизотропной шероховатой поверхности // Трение и износ, 7 (5), сс. 830-840 (1986).

- [48] Н.Ф. Семенюк. Средняя высота выступов шероховатой поверхности и плотность пятен контакта при контактировании шероховатой поверхности с гладкой // *Трение и износ*, **7** (1), сс. 85-90 (1986).
- [49] Н.Ф. Семенюк, Е.В. Терлецкая. Моделирование шероховатых изотропных поверхностей. Сообщение I // *Проблемы трибологии*, (1), сс. 83-89 (1998).
- [50] Н.Ф. Семенюк, Е.В. Терлецкая. Моделирование шероховатых изотропных поверхностей. Сообщение II // *Проблемы трибологии*, (1), сс. 90-97 (1998).
- [51] Е.В. Терлецкая. Исследование характеристик фрикционного упругого контакта шероховатых изотропных поверхностей: Дис. ... канд. техн. наук: 05.02.03, Хмельницкий, 195 с. (1996).
- [52] О.Г. Тимошук, Н.Ф. Семенюк. Результаты исследования длительности натекания газа в бессмазочных цилиндро-поршневых уплотнениях // *Проблемы трибологии*, (2), (2002).
- [53] А.П. Хусу, Ю.Р. Виттенберг, В.А. Пальмов. *Шероховатость поверхностей. Теоретико-вероятностный подход*. Наука, Москва. 344 с. (1975).
- [54] П.К. Гупта, Н.Х. Кук. Статистический анализ механического взаимодействия шероховатых поверхностей // *Проблемы трения и смазки*, **94** (1), с. 14 (1972).
- [55] M. Kubo, J. Peklenik. An analysis of micro-geometrical isotropy for random surfaces structures // *Ann. of CIRP*, (16), p. 235 (1968).
- [56] Ю.Я. Кризберг, В.П. Кокин, Я.А. Рудзит. Определение микро топографических параметров нерегулярной шероховатости // *Технологические методы повышения качества поверхности деталей машин*. Ленинградский университет, Ленинград. с. 152 (1978).
- [57] Я.А. Рудзит, А.В. Звиедрис. Методические основы определения более сложных статистических характеристик шероховатости // *Приборостроение*, 9. Рижский политехнический институт, Рига (1973).
- [58] Я.А. Рудзит, Ю.Я. Кризберг. Расчет вероятностных характеристик микро топографических параметров шероховатых поверхностей, используемых в задачах трения и износа // *Трение и износ*, **3** (6), сс. 1048-1057 (1982).
- [59] Я.А. Рудзит, И.А. Одитис, О.А. Лининьш. Определение исходных параметров профиля нерегулярной шероховатости // *Приборостроение*, **9**. Рижский политехнический институт, Рига. с. 17 (1973).
- [60] Я.А. Рудзит, И.А. Одитис. О параметрах нерегулярной шероховатости поверхности // *Приборостроение*, **8**. Рижский политехнический институт, Рига. с. 3 (1972).
- [61] А.В. Буш, Р.Д. Гибсон, Г.П. Кио. Шероховатые поверхности с сильной анизотропией // *Проблемы трения и смазки*, **101** (Ser. F, 1), с. 16 (1979).
- [62] Г.Б. Двайт. *Таблицы интегралов и другие математические формулы*. Изд. второе, исп. / Пер. с англ. Н.В. Леви; под. ред. К.А. Семендяева. Наука, Москва. 228 с. (1966).
- [63] Г. Корн, Т. Корн. *Справочник по математике для научных работников и инженеров: Определения, теоремы, формулы*. – изд. 4-е / Пер. с англ. И.Г. Арамановича, А.М. Березмана, И.А. Вайнштейна и др. Наука, Москва. 832 с. (1978).
- [64] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, II, Wiley, New York, p. 302 (1966).
- [65] А. Анго. *Математика для электро- и радиоинженеров*. Наука, Москва. 780 с. (1965).
- [66] Якобиан // БСЭ, 30, с. 481 (1978).

Н.О. Sirenko¹, М.Ф. Semenyuk², L.M. Soltys¹

The Density Probabilities of Allocation of Heights Peaks of Rough Surfaces of Solid States Modeled by Random Field

¹Vasyl Stefanyk' Precarpathian National University,
57, Shevchenko Str., Ivano-Frankivsk, 76025, Ukraine
Tel. (0342) 77.64.15; (096) 813.93.53, e-mail: sirenkog@rambler.ru
²Khmelnitsky National University,
11, Instytutska Str., Khmelnytsky, 29016, Ukraine

The mathematical description of anisotropic rough surfaces of solid states has been resulted using the model of random field. It has been shown that the formulas for isotropic surface follow from the formulas for density probabilities of heights peaks of anisotropic surface model.

Key words: mathematical model, physical model, solid state, rough surface, contact phenomena, anisotropic surface, isotropic surface, random function, random field.